Universidad de la República **30 de enero de 2025**

Facultad de Ingeniería-IMERL

EXAMEN: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA (SOLUCIÓN)

Ejercicio 1

Para obtener el estimador por momentos, planteamos la ecuación $\mathbb{E}(X) = \overline{X}_n$.
$\mathbb{E}(X) = \int_{-1}^{1} \frac{1+\theta x}{2} x dx = \frac{1}{3}\theta = \overline{X}_n$, despejando θ obtenemos que $\widehat{\theta} = 3\overline{X}_n$.
El estimador queda insesgado ya que $\mathbb{E}\left(\widehat{\theta}\right) = \mathbb{E}\left(3\overline{X}_n\right) = 3\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) = 3\mu = 3\frac{1}{3}\theta = \theta$.
$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-1}^{1} \frac{1+\theta x}{2} x^2 dx = \frac{1}{3}$, entonces $\sigma^2 = \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{3} - \frac{\theta^2}{9} = \frac{3-\theta^2}{9}$.
Como el estimador es insesgado, se tiene que

$$ECM\left(\widehat{\theta}\right) = V\left(\widehat{\theta}\right) = V\left(3\overline{X}_n\right) = 9V\left(\overline{X}_n\right) = \frac{9\sigma^2}{n} = \frac{3-\theta^2}{n}$$

por lo que la respuesta correcta es (A).

Ejercicio 2

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \int_{-x}^{x} dy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \int_{y}^{1} dx & \text{si} \quad 0 < y < 1 \\ \int_{-y}^{1} dx & \text{si} \quad -1 < y < 0 \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} = \begin{cases} 1-y & \text{si} \quad 0 < y < 1 \\ 1+y & \text{si} \quad -1 < y < 0 \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}.$$

Entonces $f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} (1-y)\,2x & \text{si} \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ (1+y)\,2x & \text{si} \quad 0 < x < 1,\ -1 < y < 0 \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} \neq f_{X,Y}(x,y)$ por lo que X e Y no son independientes.

$P(X+Y<1) = \int_0^{1/2} dx \int_{-x}^{x} dy + \int_{1/2}^{1} dx \int_{-x}^{1-x} dy = \int_0^{1/2} 2x dx + \int_{1/2}^{1} dx = \frac{3}{4}$.
Entonces la respuesta correcta es (A).

Ejercicio 3

Para hallar el espacio paramétrico planteamos las condiciones $0 \leq p_X(x,\theta) \leq 1$ para todo θ.

Entonces nos queda por un lado la desigualdad $0 \leq \theta/3 \leq 1$ que equivale a $0 \leq \theta \leq 3$ y por otro lado la desigualdad $0 \leq 1 - 2\theta/3 \leq 1$ que equivale a $0 \leq \theta \leq 3/2$. Entonces el espacio paramétrico (intersección de ambas condiciones) es

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} :\ 0 \leq \theta \leq 3/2\}.$$

Para hallar la estimación máximo verosímil maximizamos la función $h(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log(p_X(x_i,\theta))$. Teniendo en cuenta que hay 12 valores $x_i = -1$, 15 valores $x_i = 0$ y 23 valores $x_i = 1$, en $h(\theta)$ tendremos 27 sumandos $\log(\theta/3)$ y 23 sumandos $\log(1 - 2\theta/3)$, nos queda

$$h(\theta) = 27\log(\theta/3) + 23\log(1-2\theta/3) = 27\log(\theta) + 23\log(3-2\theta) + 50\log(3)$$

por lo que

$$h'(\theta) = \frac{27}{\theta} - \frac{46}{3-2\theta} = \frac{81-100\theta}{\theta(3-2\theta)} = 0 \text{ si y sólo si } \theta = 0.81.$$

Teniendo en cuenta el signo de la derivada se obtiene que la estimación máximo verosímil es $\widehat{\theta} = 0.81$. Entonces la opción correcta es (C).

Ejercicio 4

Si H_0 es cierto y le llamo X =cantidad de respuestas correctas, entonces tenemos que $X \sim$Bin$(n = 10, p = 1/2)$ La región crítica es de la forma $\{X \geq 7\}$ por lo que el nivel de significación de la prueba es igual a

$$\alpha = P_{H_0}(X \geq 7) = P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) =$$

$$\binom{10}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{9} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{7}{128} = 0.172.$$

Para el cálculo de β, tenemos que $X \sim$Bin$(n = 10, p = 0.8)$, o sea que $P(X = x) = \binom{10}{x} \times 0.8^x \times 0.2^{10-x}$ para $x = 0.1, 2, ..., 10$. Entonces

$$\beta = P_{H_1}(RC^c) = P_{H_1}(X < 7) = 1 - P(X=7) - P(X=8) - P(X=9) - P(X=10) =$$

$$1 - \binom{10}{7} \times 0.8^7 \times 0.2^3 - \binom{10}{8} \times 0.8^8 \times 0.2^2 - \binom{10}{9} \times 0.8^9 \times 0.2 - \binom{10}{10} \times 0.8^{10} = 0.121.$$

Entonces la opción correcta es (E).

Ejercicios de desarrollo

Ejercicio 1

1. $P(X > 0) = \int_0^\beta (2x + \beta)\,dx = 2\beta^2 = 1/2$ de donde se deduce que $\beta = 1/2$.

   Por otro lado debe cumplirse que $P(X \leq 0) = 1/2$.

   $P(X \leq 0) = \int_{-1}^0 (x + \alpha)\,dx = -1/2 + \alpha = 1/2$ por lo que $\alpha = 1$.

2. $$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 & \text{si} \quad -1 \leq x \\ \int_{-1}^x (t+1)\,dt & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \int_{-1}^0 (t+1)\,dt + \int_0^x (2t + 1/2)\,dt & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 \leq x \end{cases}$$

   Entonces

   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 \leq x \\ \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 \leq x \end{cases}.$$

Ejercicio 2

1. Definimos $X =$"número de estudiantes (entre los 10) que deciden ir al instituto determinado día de una semana cualquiera". Entonces $X \sim$Bin$(n = 10, p = 1/2)$, es decir que $P(X = x) = \binom{10}{x} \times 0.5^{10}$ para $x = 0, 1, 2, ..., 10$.

   Debemos hallar el menor k tal que $P\left(X \leq k\right) \geq 0.9$ lo que equivale a hallar el menor

   $$P\left(X = k+1\right) + P\left(X = k+2\right) + ... + P\left(X = 10\right) \leq 0.1.$$

   $$\begin{aligned} P\left(X = 10\right) + P\left(X = 9\right) + P\left(X = 8\right) &= 0.055. \\ P\left(X = 10\right) + P\left(X = 9\right) + P\left(X = 8\right) + P\left(X = 7\right) &= 0.172. \end{aligned}$$

   Entonces el valor de k buscado es $k = 7$.

2. La probabilidad de que el lunes de la semana próxima ningún estudiante quede sin escritorio es $P\left(X \leq 7\right) = 1 - 0.055 = 0.945$ (esta probabilidad es la misma para cualquiera de los otros días de la semana próxima por la independencia de elección de cada estudiante sobre ir o no ir al instituto cualquier día de la semana próxima).

   Entonces la probabilidad de que los días lunes, martes, jueves y viernes ningún estudiante quede sin escritorio y el miércoles algún estudiante quede sin escritorio es

   $$0.945^4 \times 0.055 = 0.0438.$$

Ejercicio 3

1. Definimos los sucesos $E =$"el individuo tiene la enfermedad", $P =$"al individuo le dio el test positivo". Sabemos que $P(E) = 0.04$, $P(P/E) = 0.96$, $P\left(P^c/E^c\right) = 0.99$.

   Entonces queremos hallar

   $$P\left(E/P\right) = \frac{P\left(E \cap P\right)}{P\left(P\right)} = \frac{0.04 \times 0.96}{0.04 \times 0.96 + 0.96 \times 0.01} = 0.8.$$

2. Definimos la variable $X =$"cantidad de individuos observados hasta que se obtenga uno que no posea la enfermedad", entonces $X \sim$Geo$(p = 0.2)$.

   Es decir que $P(X = x) = 0.2 \times 0.8^{x-1}$ para $x = 1, 2, 3, ...$

   Entonces la probabilidad de que sea necesario observar al menos 2 individuos es igual a

   $$P\left(X \geq 2\right) = 1 - P\left(X = 0\right) - P\left(X = 1\right) = 1 - 0.2 - 0.2 \times 0.8 = 0.64.$$

Ejercicio 4

1. Definimos X =”diámetro de un cable producido por la empresa elegido al azar”, entonces $X \sim N\left(7.25; 0.1^2\right)$.

   Calculamos (recordando que $\phi\left(-a\right) = 1 - \phi\left(a\right)$)

   $$P\left(X \geq 7.35\right) = 1 - F_X(7.25) = 1 - \phi\left(\frac{7.25 - 7.35}{0.1}\right) = 1 - \phi\left(-1\right) = \phi\left(1\right) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

2. Definimos para $i = 1, 2, 3$ las variables X_i =”diámetro del $i-$ésimo cable producido por la empresa elegido al azar” que son independientes entre sí.

   Queremos calcular $P\left(7.25 \leq \frac{X_1+X_2+X_3}{3} \leq 7.3\right)$. Teniendo en cuenta que $\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ distribuye $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(7.25; \frac{0.1^2}{3}\right)$ por ser combinación lineal de normales independientes con las mismas medias y varianzas, tenemos que

   $$P\left(7.25 \leq \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \leq 7.3\right) = \phi\left(\frac{7.3 - 7.25}{0.1/\sqrt{3}}\right) - \phi\left(\frac{7.25 - 7.25}{0.1/\sqrt{3}}\right) =$$

   $$\phi\left(0.866\right) - \phi\left(0\right) = 0.3078.$$