**Universidad de la República** **30 de enero de 2025**

**Facultad de Ingeniería-IMERL**

## EXAMEN: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

| Nº de examen | Cédula | Apellido y nombre | Salón |
|---|---|---|---|
| | | | |

### Múltiple opción (Total: 48 puntos)

En cada pregunta hay sólo una opción correcta.

Respuesta correcta: 12 puntos, respuesta incorrecta: -3 puntos, no respuesta: 0 punto.
Colocar las respuestas en el siguiente cuadro.

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| | | | |

### Ejercicio 1

$X_1, X_2, ..., X_n$ es una MAS de cierta $X$ cuya densidad viene dada por $f_X(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1+\theta x}{2} & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}$ siendo $\theta \in (-1,1)$. Le llamamos $\widehat{\theta}$ al estimador de $\theta$ por el método de los momentos. Entonces

(A) $\widehat{\theta} = 3\overline{X}_n$ y además $\text{ECM}\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{3-\theta^2}{n}$.

(B) $\widehat{\theta} = 3\overline{X}_n$ y además $\text{ECM}\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{3-\theta^2}{9n}$.

(C) $\widehat{\theta} = \overline{X}_n/3$ y además $\text{ECM}\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{3-\theta^2}{n}$.

(D) $\widehat{\theta} = \overline{X}_n/3$ y además $\text{ECM}\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{3-\theta^2}{9n}$.

(E) $\widehat{\theta} = 3\overline{X}_n$ y además $\text{ECM}\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{3-\theta^2}{9}$.

## Ejercicio 2

Se consideran dos variables aleatorias $X$ e $Y$ cuya densidad conjunta viene dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \ -x < y < x \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} .$$

Entonces

(A) $X$ e $Y$ no son independientes y además $P\,(X+Y<1) = 3/4$.

(B) $X$ e $Y$ son independientes y además $P\,(X+Y<1) = 3/4$.

(C) $X$ e $Y$ no son independientes y además $P\,(X+Y<1) = 2/3$.

(D) $X$ e $Y$ son independientes y además $P\,(X+Y<1) = 2/3$.

(E) $X$ e $Y$ no son independientes y además $P\,(X+Y<1) = 1/4$.

## Ejercicio 3

Dada la variable aleatoria $X$ cuya función de probabilidad depende de un parámetro $\theta$ y viene dada por

$$P(X=x) = p_X\,(x,\theta) = \begin{cases} \theta/3 & \text{si} \quad x = -1 \\ \theta/3 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 - 2\theta/3 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} .$$

Se tiene una muestra aleatoria simple $X_1, X_2, ..., X_{50}$ de $X$ de la cual 12 veces se observó el valor $-1$, 15 veces se observó el valor 0 y 23 veces se observó el valor 1. Le llamamos $\widehat{\theta}$ a la estimación máximo verosímil y $\Theta$ al conjunto de valores posibles que puede tomar el parámetro $\theta$. Entonces

(A) $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} : \ 0 \leq \theta \leq 1\}$ y $\widehat{\theta} = 0.45$.

(B) $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} : \ 0 \leq \theta \leq 3/2\}$ y $\widehat{\theta} = 0.54$.

(C) $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} : \ 0 \leq \theta \leq 3/2\}$ y $\widehat{\theta} = 0.81$.

(D) $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} : \ 0 \leq \theta \leq 1\}$ y $\widehat{\theta} = 0.54$.

(E) $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} : \ 0 \leq \theta \leq 1/2\}$ y $\widehat{\theta} = 0.48$.

## Ejercicio 4

Un examen de múltiple opción con opciones de verdadero y falso, consta de 10 preguntas. Se plantea el siguiente test de hipótesis. $H_0$ : el estudiante contesta al azar versus $H_1 : H_0$ no es cierto. Se adopta la siguiente regla de decisión. Se rechaza $H_0$ si y sólo si el estudiante contesta correctamente 7 o más preguntas. Si le llamamos $\alpha$ al nivel de significación de la prueba y $\beta$ a la probabilidad de error de tipo II (en el caso en que un estudiante conteste correctamente con probabilidad 0.8), entonces

(A) $\alpha = 0.043$ y $\beta = 0.313$.

(B) $\alpha = 0.215$ y $\beta = 0.388$.

(C) $\alpha = 0.125$ y $\beta = 0.152$.

(D) $\alpha = 0.082$ y $\beta = 0.052$.

(E) $\alpha = 0.172$ y $\beta = 0.121$.

## Ejercicio de desarrollo (Total: 52 puntos)

### Ejercicio 1 (14 puntos)

Se considera una variable aleatoria $X$ cuya función de densidad viene dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \alpha & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 2x + \beta & \text{si} \quad 0 \leq x < \beta \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} \quad \text{siendo } \beta > 0$$

y de la cual se sabe que $P(X > 0) = 1/2$.

1. Hallar $\alpha$ y $\beta$.
2. Hallar la función de distribución de $X$.

## **Ejercicio 2** (14 puntos)

Un Instituto de investigación concede becas a 10 estudiantes. Los estudiantes pueden optar por trabajar en sus respectivas casas o concurrir al instituto. Cada día la probabilidad de que un becario decida quedarse a trabajar en su casa es 0.5 y la de que concurra al instituto es 0.5. Se supone que cada día, cada becario toma independientemente de los demás la decisión de ir al instituto o quedarse en la casa. La dirección del Instituto entiende que la probabilidad de qué un día cualquiera todos vayan a trabajar y sean necesarios 10 escritorios es muy baja. Por lo cual tiene intención de comprar un número $k$ de escritorios ($k < 10$).

1. Hallar el mínimo valor de $k$ de modo que un día genérico de una semana cualquiera exista una probabilidad de al menos 0.9 de que ninguno de los becarios que concurran se quedará sin escritorio.

2. Con el $k$ hallado en la parte anterior, hallar la probabilidad de que en los 5 días de una semana, algún estudiante se quede sin escritorio únicamente el jueves.

## **Ejercicio 3** (12 puntos)

Una enfermedad tiene una prevalencia de un 4% en determinada población. Se dispone de un test clínico para detectarla. El test da positivo en el 96% de los casos en que la persona tiene la enfermedad y el test da negativo en el 99% de los casos en que la persona está sana.

1. Dado que a un individuo el test le dio positivo, hallar la probabilidad de que el individuo realmente tenga la enfermedad.

2. Si dentro del conjunto de individuos a quienes el test les dio positivo se eligen de manera independiente individuos hasta obtener uno que no tenga la enfermedad, hallar la probabilidad de que sea necesario observar al menos a 3 individuos (puede asumirse que el conjunto de individuos a quienes el test les dio positivo es suficientemente grande).

## **Ejercicio 4** (12 puntos)

El diámetro medio de los cables que fabrica determinada empresa está normalmente distribuido con una media de 7.25 $mm$ y un desvío de 0.1 $mm$.

1. Hallar la probabilidad de que un cable elegido al azar tenga un diámetro de al menos 7.35 $mm$.

2. Si se seleccionan independientemente 3 cables, hallar la probabilidad de que el promedio de estos 3 cables tenga un diámetro comprendido entre los 7.25 $mm$ y los 7.30 $mm$.

Tabla de la función $\phi(z) = F_Z(z)$, siendo $Z$ con distribución N(0,1).

| $z$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7703 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |