Cálculo DIferencial e Integral en Varias Variable

Examen Julio 2023

N° Examen	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 48 puntos)			
1	**2**	**3**	**4**
A	B	D	A

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C** o **D**, según corresponda.
Correctas: 12 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

La duración del examen es de 3:30 hs. y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.
Para aprobar se necesita un mínimo de 60 puntos.

SÓLO PARA USO DOCENTE		
MO	**Des.**	**Total**

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 48 puntos)

Correctas: 12 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

1. Se considera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^z$.
   Indica la opción correcta:

   (A) La imagen por f de rectas horizontales está contenida en rectas que pasan por el origen y la imagen por f de rectas verticales son circunferencias centradas en el origen.

(B) La imagen por f de rectas horizontales son rectas verticales y la imagen por f de rectas verticales son rectas horizontales.

(C) La imagen por f de rectas verticales está contenida en rectas que pasan por el origen y la imagen por f de rectas horizontales son circunferencias centradas en el origen.

(D) Ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.

Solución. Dado $a + bi \in \mathbb{C}$ tenemos por definición $f(a + bi) = e^a(cos(b) + isen(b))$, entonces:

- Si $a \in \mathbb{R}$ está fijo, entonces $\{e^a(cos(b) + isen(b)) : b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ es una circunferencia de radio e^a.
- Si $b \in \mathbb{R}$ está fijo, entonces $\{e^a(cos(b) + isen(b)) : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ es un rayo desde el origen con dirección $(cos(b) + isen(b))$.

Luego la opción correcta es la A.

2. Se considera la función $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ tal que el gráfico de f en el intervalo $[n, n + 1]$ con $n \in \mathbb{N}$ es el que se muestra en la figura:

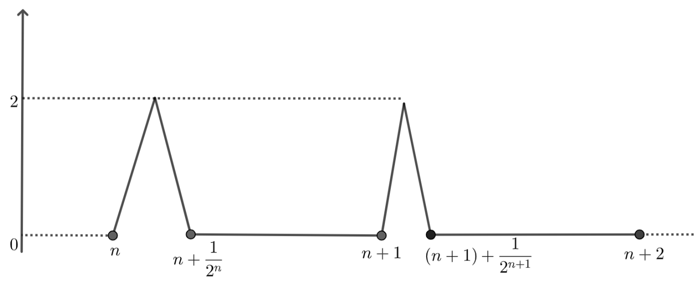

Figure 1: Gráfico de f en el intervalo $[n, n + 1]$

Indica la opción correcta:

(A) La integral impropia $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(B) La integral impropia $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ no existe.

(C) La integral impropia $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(D) La integral impropia $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ no existe.

Solución. El area bajo el grafico de f es la suma del area de todos los triangulos de la figura, entonces

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n + \frac{1}{2^n} - n)2}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Por otro lado $\lim_n f(n) = 0$, mientras que $\lim_n f(n + \frac{1}{2^{n+1}}) = 2$ (esto es tomarse la sucesión de los puntos donde f vale 2, que corresponde con el punto medio de la base de los triángulos), entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ no existe. Por lo tanto la opción correcta es la B.

3. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Se define $C_n \subset \mathbb{R}^2$ tal que $C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$. Se considera el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$A = \bigcup_{n>0} C_n.$$

Indica la opción correcta:

(A) El conjunto A^c es abierto y $fr(A) = A$ ($fr(A)$ denota la frontera de A).

(B) El conjunto A^c es abierto y $A \neq fr(A)$.

(C) El conjunto A es abierto

(D) El conjunto A no es abierto ni cerrado

Solución. Observar que $0 \notin A$ y es un punto frontera. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, entonces $\emptyset \neq B(0,\varepsilon) \cap C_n \subset B(0,\varepsilon) \cap A$ y por otro lado $B(0,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. Deducimos entonces que A no es cerrado. Es claro que todo punto de A es frontera por lo que no es abierto. Entonces la opción correcta es la D.

4. Se consideran las funciones diferenciables $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $h(u,v) = (h_1(u,v), h_2(u,v))$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g = f \circ h$. Se sabe que: $h(1,1) = (2,2)$, $\frac{\partial h_1}{\partial u}(1,1) = 2$ y $\frac{\partial h_2}{\partial u}(1,1) = 3$.
Entonces:

(A) $g_u(1,1) = 2f_x(2,2) + 3f_y(2,2)$

(B) $g_u(1,1) = 3f_x(2,2) + 2f_y(2,2)$

(C) $g_u(1,1) = 2f_x(2,2) - 3f_y(2,2)$

(D) $g_u(1,1) = 3f_x(2,2) - 2f_y(2,2)$

Solución. Escribimos $f(x,y)$. Como h y f son diferenciables, por la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} g_u(1,1) &= (f \circ h)_u(1,1) = f_x(h(1,1))\frac{\partial h_1}{\partial u}(1,1) + f_y(h(1,1))\frac{\partial h_2}{\partial u}(1,1) \\ &= 2f_x(2,2) + 3f_y(2,2) \end{aligned}$$

Por lo tanto la opción correcta es la A.

Ejercicios de desarrollo (Total: 52 puntos, cada ejercicio vale 26)

Los procedimientos presentados para resolver los problemas son solamente un camino posible.

1. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2+y^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x, y) = 1$. Se considera $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x, y) = \text{máx}\{f(x, y), g(x, y)\}$.

   (a) Realiza un bosquejo del gráfico de h.

   (b) Estudia continuidad de h.

   (c) Estudia diferenciabilidad de h en el punto $(1, 0)$.

   Solución. (a) Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Vemos que en D, h es constante 1 y mirando las curvas de nivel, h es un paraboloide en D^c. Entonces,

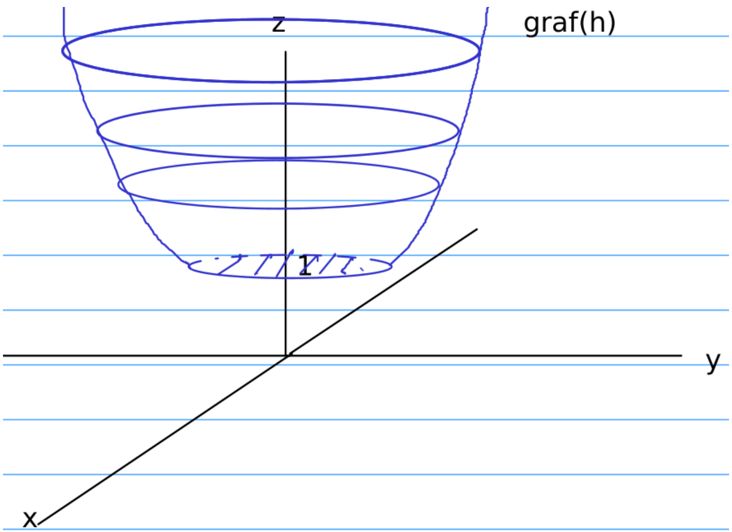

Figure 2: Gráfico de h.

   (b) Observar que h es continua en $(\partial D)^c$ pues f y g son continuas. Ahora sea $(x_0, y_0) \in \partial D$ y $\varepsilon > 0$, como f es continua existe $\delta_f > 0$ tal que $f(B((x_0, y_0), \delta_f)) \subset B(1, \varepsilon)$ análogamente existe $\delta_g > 0$ tal que $g(B((x_0, y_0), \delta_g)) \subset B(1, \varepsilon)$.

   Tomamos $\delta = \text{mín}\{\delta_f, \delta_g\}$, entonces observar que $h|_D = g|_D$ y $h|_{D^c} = f|_{D^c}$, luego $h(B((x_0, y_0), \delta) \cap D) = g(B((x_0, y_0), \delta) \cap D) \subset B(1, \varepsilon)$, esto es el trozo de la bola $B((x_0, y_0), \delta)$ que está en D y por lo tanto h es igual a g. Análogamente, $h(B((x_0, y_0), \delta) \cap D^c) = f(B((x_0, y_0), \delta) \cap D^c) \subset B(1, \varepsilon)$, entonces $h(B((x_0, y_0), \delta)) \subset B(1, \varepsilon)$ y por lo tanto h es continua en (x_0, y_0).

Concluimos que h es continua.

(c) Veamos que h no es diferenciable en $(1, 0)$ probando que no existe $\frac{\partial h}{\partial x}(1, 0)$. Por definición,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) = \lim_{r \to 0} \frac{h(1+r,0) - h(1,0)}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{h(1+r,0) - 1}{r}.$$

Entonces acercándonos por fuera de D, como f es diferenciable en $(1, 0)$,

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{h(1+r,0) - 1}{r} = \lim_{r \to 0^+} \frac{f(1+r,0) - 1}{r} = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2,$$

pero si nos acercamos por dentro de D,

$$\lim_{r \to 0^-} \frac{h(1+r,0) - 1}{r} = \lim_{r \to 0^+} \frac{g(1+r,0) - 1}{r} = \frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = 0.$$

Entonces $\frac{\partial h}{\partial x}(1, 0)$ no existe y por lo tanto h no es diferenciable en $(1, 0)$.

2. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1; xy \geq 0\}$.

   (a) Realiza un bosquejo de D.

   (b) Sea D_1 la parte de D que pertenece al primer cuadrante y D_2 la que pertenece al tercer cuadrante. Probar que

   $$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

   Quizás sea una buena sugerencia realizar un cambio de variable.

   (c) Realiza un cambio de variables que transforme D_1 en un rectángulo, y utiliza esto para calcular

   $$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

   Concluya el valor de

   $$\iint_{D} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

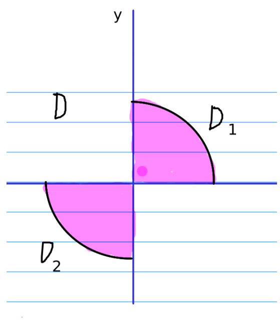

Figure 3: Conjunto D

Solución. (a) D corresponde a la intersección del primer y tercer cuadrante con el disco unidad:

(b) Consideramos la transformación lineal $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x, y) = -(x, y),$$

g es un difeo por ser lineal e invertible, $g(D_2) = D_1$ y $det\, g = 1$, entonces por el teorema del cambio de variable,

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \iint_{g^{-1}(D_1)} e^{-((-x)^2+(-y)^2)} |det\, g|\, dx\, dy = \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

(c) Consideremos el cambio de variable a polares $g : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ dada por $g(\rho, \theta) = (\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta))$.

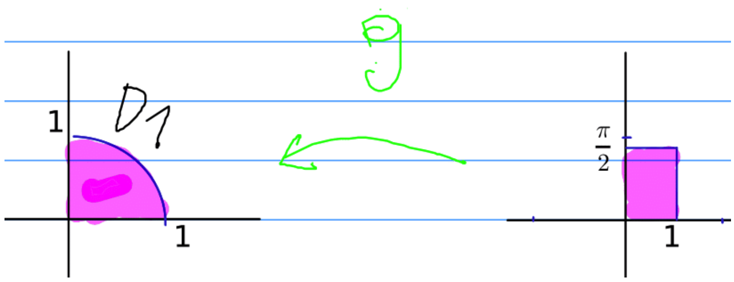

Figure 4: Cambio de variable g

Entonces por el teorema del cambio de variables,

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho e^{-\rho^2}\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{-e^{-\rho^2}}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e}).$$

Por último, usando (b),

$$\iint_{D} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = 2\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{e}).$$