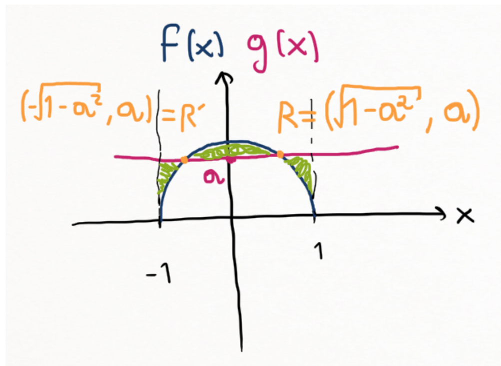
Vamos a resolver el ejercicio 7 de la sección 7.6 del práctico 7. Este es un problema de optimización (en ese sentido análogo a los de la sección 6.6 del práctico de derivadas) que involucra áreas, por lo que requiere integrales también.

Como es usual en optimización, comenzamos planteando el problema, con el objetivo de encontrar una función que lo represente, a la que luego le buscaremos extremos.



Definimos a como la altura de la recta. Es el parámetro que el ejercicio nos pide determinar para minimizar el área pintada de verde. Como no se dice nada en la letra sobre la ubicación del semicírculo, lo situamos con centro en el origen, de modo que es la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. La recta paralela a la base del semicírculo es la función $g(x) = a$. Es una función constante que vale la altura de la recta.

Lo siguiente es plantear una función $h(a)$ que calcule el valor del área pintada dada la altura a. Para calcular las áreas hay que integrar $f - g$ o $g - f$, dependiendo de cual está por encima de la otra. Para saber cuándo se integra $f - g$ y $g - f$ hay que determinar los puntos R y R' en los que f y g se cortan. Alcanza encontrar R, porque R' es simétrico. Para eso se plantea la ecuación $f(x) = g(x)$. Despejando se llega a $x = \sqrt{1-a^2}$, como se muestra en el dibujo. Teniendo en cuenta esto, la función $h(a)$ es la siguiente:

$$h(a) = \int_{-1}^{-\sqrt{1-a^2}} a - \sqrt{1-x^2}\ dx + \int_{-\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-a^2}} \sqrt{1-x^2} - a\ dx + \int_{\sqrt{1-a^2}}^{1} a - \sqrt{1-x^2}\ dx$$

En el intervalo $(-1, -\sqrt{1-a^2})$, se cumple $g > f$, por lo que hay que integrar $g(x) - f(x) = a - \sqrt{1-x^2}$. En el intervalo $(-\sqrt{1-a^2}, \sqrt{1-a^2})$ se cumple lo contrario, por lo que se integra $f(x) - g(x)$ y en el último intervalo nuevamente $g > f$.

Primero que nada, por simetría se puede simplificar la función h. Alcanza calcular el área de la mitad derecha ($x > 0$) y multiplicar por dos. Por lo tanto tenemos:

$$h(a) = 2\int_{0}^{\sqrt{1-a^2}} \sqrt{1-x^2} - a\ dx + 2\int_{\sqrt{1-a^2}}^{1} a - \sqrt{1-x^2}\ dx$$

A esa función debemos derivarla con respecto a a para poder hallar sus extremos. Como debemos derivar integrales vamos a utilizar el teorema fundamental del cálculo. Sin embargo, con la forma como está escrita la función, no podemos utilizarlo. Esto es porque la variable a además de aparecer en los extremos está también adentro de la integral. Para utilizar el teorema fundamental del cálculo, la variable con la que estamos derivando (en este caso a) debe aparecer solo en los extremos. Adentro de la integral debe haber solamente otra variable (en este caso x). Para poder utilizar el teorema fundamental del cálculo tendremos que antes hacer cuentas para quitar la a de adentro de la integral.

Separando las integrales en las sumas tenemos lo siguiente:

$$h(a) = 2\int_{0}^{\sqrt{1-a^2}} \sqrt{1-x^2}\ dx - 2\int_{0}^{\sqrt{1-a^2}} a\ dx + 2\int_{\sqrt{1-a^2}}^{1} a\ dx - 2\int_{\sqrt{1-a^2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx$$

Para la primera y la última integral podemos usar el teorema fundamental del cálculo, porque la a solamente aparece en los extremos. No es el caso con las dos del medio, pero son integrales más sencillas de calcular, por lo que haremos eso.

Al momento de calcular las integrales, la a juega el papel de una constante, porque la variable de integración es x. Por lo tanto, usando Barrow, las integrales dan lo siguiente:

$$\int_0^{\sqrt{1-a^2}} a\ dx = ax|_0^{\sqrt{1-a^2}} = a\sqrt{1-a^2} \qquad \int_{\sqrt{1-a^2}}^1 a\ dx = ax|_{\sqrt{1-a^2}}^1 = a - a\sqrt{1-a^2}$$

Incorporando eso en la fórmula de h llegamos a:

$$h(a) = 2a(1-2\sqrt{1-a^2}) + 2\int_0^{\sqrt{1-a^2}} \sqrt{1-x^2}\ dx - 2\int_{\sqrt{1-a^2}}^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$$

Ahora sí podemos derivar h. Como aparece varias veces, conviene recordar que por regla de la cadena, la derivada de $\sqrt{1-a^2}$ es:

$$\left(\sqrt{1-a^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}(-2a) = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$$

Para que sea menos probable equivocarnos, calculemos la derivada de los tres sumandos de h por separado y luego sumemos. Para el primer sumando aplicamos distributiva del producto y luego usamos regla del producto.

$$\left(2a - 4a\sqrt{1-a^2}\right)' = 2 - 4\sqrt{1-a^2} + \frac{4a^2}{\sqrt{1-a^2}}$$

Para los siguientes dos debemos usar el teorema fundamental del cálculo junto con la regla de la cadena, como se hace en el ejercicio 7.1.1.

$$\left(2\int_0^{\sqrt{1-a^2}} \sqrt{1-x^2}\ dx\right)' = 2\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}^2}\left(\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}\right) = \frac{-2a^2}{\sqrt{1-a^2}}$$

El término $\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}^2}$ es el integrando ($\sqrt{1-x^2}$) sustituyendo la x por el extremo superior ($\sqrt{1-a^2}$). Por otra parte, $\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$ es la derivada del extremo superior.

$$\left(-2\int_{\sqrt{1-a^2}}^1 \sqrt{1-x^2}\ dx\right)' = \left(2\int_1^{\sqrt{1-a^2}} \sqrt{1-x^2}\ dx\right)' = 2\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}^2}\left(\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}\right) = \frac{-2a^2}{\sqrt{1-a^2}}$$

En el primer paso intercambiamos los extremos de la integral y cambiamos el signo.

Juntando las tres derivadas que calculamos llegamos a lo siguiente:

$$h'(a) = 2 - 4\sqrt{1-a^2} + \frac{4a^2}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{-2a^2}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{-2a^2}{\sqrt{1-a^2}} = 2 - 4\sqrt{1-a^2}$$

Igualando la derivada a 0 se despeja que a debe valer $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analizando el signo de la derivada vemos que si $a < \frac{\sqrt{3}}{2}$ es negativa y si $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$ es positiva. Por lo tanto concluimos que en $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se alcanza el mínimo buscado.