Soluciones a ejercicios seleccionados del práctico 12

1. Ejercicio 2.1

Calcular integrando por partes.

h) $\int cos(x)sen(x)dx$

Tomaremos $f = cos$ y $g' = sen$, de manera que $f' = -sen$ y $g = -cos$. Aplicando partes:

$$\int cos(x)sen(x)dx = cos(x)(-cos(x)) - \int(-sen(x))(-cos(x))dx = -cos^2(x) - \int cos(x)sen(x)dx$$

Pasando la integral del lado derecho para el lado izquierdo:

$$2\int cos(x)sen(x)dx = -cos^2(x) + C \implies \int cos(x)sen(x)dx = -\frac{cos^2(x)}{2} + C$$

Nota: Si se inicia la resolución del ejercicio tomando papeles intercambiados (es decir, $f = sen$ y $g' = cos$) se llega de manera similar al siguiente resultado: $\int cos(x)sen(x)dx = \frac{sen^2(x)}{2} + C$. Esto, a primera vista, parece ser una contradicción. Sin embargo, las dos primitivas halladas son en realidad la misma. ¿Por qué?

2. Ejercicio 2.2

Calcular las integrales a partir del método de sustitución.

j) $\int \frac{1}{cos(x)}dx$

Extrañamente, la sustitución que resuelve más rápidamente el problema es $u = sen(x)$. Para este cambio de variable:

$$x = arcsen(u) \implies dx = arcsen'(u)du = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Por otro lado, $cos^2(x) + sen^2(x) = 1$, de manera que: $cos(x) = \sqrt{1 - sen^2(x)} = \sqrt{1-u^2}$. Uniendo todo lo anterior:

$$\int \frac{1}{cos(x)}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{du}{1-u^2}du$$

Con lo que la función trigonométrica que teníamos antes se ha convertido en una función racional. Se prosigue de la siguiente manera:

$$\int \frac{du}{1-u^2}du = \int \left(\frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}\right)du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}du$$

Ambas integrales se hallan como logaritmos, la primera con el cambio de variable $v = 1 - u$, y la segunda $w = 1 + u$:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}du = \frac{1}{2}\int -\frac{1}{v}dv = \frac{1}{2}(-log(v) + C) = -\frac{1}{2}log(1-u) + C$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}dw = \frac{1}{2}(log(w) + C) = \frac{1}{2}log(1+u) + C$$

Sumando:

$$\int \frac{du}{1-u^2}du = \frac{1}{2}log(1+u) + C - \frac{1}{2}log(1-u) + C = \frac{1}{2}\left(log(1+u) - log(1-u)\right) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable original:

$$\int \frac{1}{cos(x)}dx = \frac{1}{2}\left(log(1+sen(x)) - log(1-sen(x))\right) + C$$

Esto se podría compactar un poco más, si se lo considera necesario, haciendo uso de ciertas propiedades de los logaritmos:

$$\int \frac{1}{cos(x)}dx = \frac{1}{2}log\left(\frac{1+sen(x)}{1-sen(x)}\right) + C$$

Si bien la integral es indefinida, cuando se realizo el cambio de variable $u = sen(x)$, el intervalo de integración resultante tiene que estar incluido en $(-1, 1)$ (la razon por que es estricto es que en caso contrario $cos(x) = 0$, es decir se anularia el denominador). Por tanto $1-u$ y $1+u$ son positivos (recordar que $\int \frac{1}{v}\,dv = \log(|v|)$).

3. Ejercicio 2.4

Calcular, utilizando fracciones simples, las siguientes integrales de funciones racionales:

e) $\int \frac{x}{x^3-6x^2+11x-6}dx$

Primeramente se ha de factorizar denominador de la fracción. El factor $x-1$ se halla por ser raíz evidente, y después de una aplicación de Ruffini y de resolver una ecuación de segundo grado se hallan los dos factores restantes, que son $x-2$ y $x-3$. Ahora nos gustaría poder descomponer la fracción de la siguiente manera:

$$\frac{x}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Donde A, B y C serían constantes. Si buscamos denominador común en el término derecho se llega a lo siguiente:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{A(x^2-5x+6) + B(x^2-4x+3) + C(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (-5A-4B-3C)x + 6A+3B+2C}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Nos valdría encontrar entonces la siguiente igualdad entre polinomios:

$$x = (A+B+C)x^2 + (-5A-4B-3C)x + 6A+3B+2C$$

Y dos polinomios son iguales si y solo si son iguales coeficiente a coeficiente, de manera que buscamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -5A-4B-3C &= 1 \\ 6A+3B+2C &= 0 \end{aligned}$$

Resolver este sistema entrega los siguientes valores: $A = 1/2$, $B = -2$, $C = 3/2$. Sustituyéndolos en la expresión original, finalmente podemos escribir nuestra función como suma de términos más simples:

$$\frac{x}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3/2}{x-3}$$

Y ahora la integral que ha de resolverse se descompone en lo siguiente:

$$\int \frac{x}{x^3-6x^2+11x-6}dx = \int\left(\frac{1/2}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3/2}{x-3}\right)dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx - 2\int\frac{1}{x-2}dx + \frac{3}{2}\int\frac{1}{x-3}dx$$

Los tres sumandos son logaritmos:

$$\int \frac{1}{x-1}dx = log(|x-1|) + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}dx = log(|x-2|) + C$$

$$\int \frac{1}{x-3}dx = log(|x-3|) + C$$

De manera que:

$$\int \frac{x}{x^3-6x^2+11x-6}dx = \frac{1}{2}log(|x-1|) - 2log(|x-2|) + \frac{3}{2}log(|x-3|) + C$$

Extra:
En el caso de raices simples se puede resolver el sistema de ecuaciones lineales de una forma mas sencilla
La igualdad

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Es equivalente a

$$x = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

Para todo x distinto de 1, 2 o 3. Debido a que el denominador es el mismo, y por tanto solo hay que tener cuidado cuando este se anula.

Como es una igualdad en polinomios, si vale para todo $\mathbb{R}$ salvo una cantidad finita de puntos (en este caso 3) vale para todo $\mathbb{R}$.

Luego evaluamos en las distintas raices, mas especificamente 1, 2 y 3

Para $x = 1$. se tiene que $1 = A(-1)(-2) + B(0)(-2) + C(0)(-1)$, es decir $A = \frac{1}{2}$.

De forma análoga para $x = 2$ se obtiene B y para $x = 3$ se obtiene C