# Ejercicios P12

## Ejercicio 1 - Teorema Fundamental

### 1. Sin calcular la integral, derivar las siguientes funciones:

**b)** $f_2(x) = \int_x^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\ dt$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \int_x^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\ dt \\ -f_2(x) &= \int_3^x \sqrt{t^2 - t + 1}\ dt \\ -f_2'(x) &= \sqrt{x^2 - x + 1} \\ f_2'(x) &= -\sqrt{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

**d)** $f_4(x) = \int_{cos(x)}^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\ dt$

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \int_{cos(x)}^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\ dt \\ -f_4(x) &= \int_3^{cos(x)} \sqrt{t^2 - t + 1}\ dt \\ -f_4'(x) &= cos'(x) \cdot \sqrt{cos(x)^2 - cos(x) + 1} \\ -f_4'(x) &= (-sen(x)) \cdot \sqrt{cos(x)^2 - cos(x) + 1} \\ f_4'(x) &= sen(x) \cdot \sqrt{cos(x)^2 - cos(x) + 1} \end{aligned}$$

### 3. Determinar (si existen) una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un número real $c \in \mathbb{R}$ tales que:

Para este ejercicio hay que recordar que si dos funciones reales tienen igual derivada en todo punto y coinciden en un punto entonces son iguales.

**d)** $\int_1^x f(t)\ dt = x^2 - c$

Derivamos a ambos lados:

$$\left[\int_1^x f(t)\ dt\right]' = (x^2 - c)'$$
$$f(x) = 2x$$

Ahora resta hallar $c$, elegimos un $x$ cualquiera, pero es conveniente usar x de forma que los limites de integración sean iguales. En este caso $x = 1$.

$$\int_1^1 f(t)\ dt = 0$$

Lo igualamos a $x^2 - c$ recordando que habíamos tomado $x = 2$:

$$\begin{aligned} 0 &= 1^2 - c \\ c &= 1 \end{aligned}$$

**i)** $\int_0^x f(t)\ dt = c - e^{-x^2}$

Procedemos al igual que en el anterior derivando (utilizando TFC):

$$\begin{aligned} \left[\int_0^x f(t)\ dt\right]' &= (c - e^{-x^2})' \\ f(x) &= 2x\, e^{-x^2} \end{aligned}$$

Para hallar c en este caso optamos por elegir $x = 0$, de esta forma no es necesario realizar la integral porque ya sabemos que si los límites de integración coinciden la integral es 0.

Por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} &\int_0^0 f(t)\ dt = 0 = c - e^{-0^2} \\ &0 = c - e^0 \\ &0 = c - 1 \\ &c = 1 \end{aligned}$$