Invertibilidad de funciones

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$

a) *Hallar el intervalo de longitud máxima, que contenga al 0 en el que se pueda definir la inversa de f (sea g esta inversa).*

Determinemos la derivada de f:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4\right)' = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

De manera que $f'(x) \leq 0$ si $x \in [-3, 2]$, y $f'(x) > 0$ en cualquier otro caso. Esto quiere decir que f es monótona creciente en $(-\infty, -3]$, monótona decreciente en $[-3, 2]$, y monótona creciente de vuelta en $[2, +\infty)$. El mayor intervalo que contiene al 0 en el que la función es monótona (y por tanto invertible) es $[-3, 2]$.

b) *Hallar $g'(4)$.*

La fórmula para la derivada de la función inversa nos dice lo siguiente:

$$g'(4) = \frac{1}{(g^{-1})'(g(4))} = \frac{1}{f'(g(4))}$$

Ahora, ¿cuánto es $g(4)$? Dado que g y f son inversas, esta será la preimagen de 4 por f que se encuentre en el intervalo $[-3, 2]$. Este cálculo podría ser complicado si no fuera porque el hecho de que evidente que $f(0) = 4$. Entonces $g(4) = 0$ y el problema se reduce a lo siguiente:

$$g'(4) = \frac{1}{f'(g(4))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{0^2 + 0 - 6} = -\frac{1}{6}$$