Vamos a resolver el ejercicio 6.7.5 del capítulo 6 del práctico (examen, febrero 2017, primer ejercicio de desarrollo partes 1 y 2).

Parte 1

Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Hay que ver que si $\forall x \in (a, b),\ f'(x) = 0$ entonces necesariamente h es una función constante (en todo el intervalo $[a, b]$).

Para demostrar eso utilizaremos el teorema (de valor medio) de Lagrange, cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema 1. *Sea $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ continua en $[c, d]$ y derivable en (c, d). Entonces existe $e \in (c, d)$ tal que:*

$$f'(e) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$

Para probar que la función h es constante, demostraremos que para cualquier $x \in [a, b]$, se cumple $f(x) = f(a)$.

Sea $x \in (a, b]$ cualquiera. Vamos a utilizar el teorema de valor medio con $h : [a, x] \to \mathbb{R}$, es decir, no utilizamos todo el intervalo $[a, b]$, sino el subintervalo que va de a hasta x. El teorema de valor medio nos dice que existe $e \in (a, x)$ tal que:

$$h'(e) = \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

Como $e \in (a, x)$ (y $x < b$), por hipótesis tenemos que $h'(e) = 0$. De esto deducimos que $h(x) - h(a) = 0$ y por lo tanto que $h(x) = h(a)$. Como x es cualquiera perteneciente a $(a, b]$, concluimos que $\forall x \in [a, b],\ h(x) = h(a)$ (el caso $x = a$ se cumple directamente), por lo tanto concluimos que h es constante en el intervalo $[a, b]$: $h(x) = c$ con constante $c = h(a)$.

Parte 2

Sean $h_1, h_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) tales que:

- $h_1(a) = h_2(a)$
- $\forall x \in (a, b),\ h_1'(x) = h_2'(x)$

hay que probar que $\forall x \in [a, b], h_1(x) = h_2(x)$. Vamos a hacerlo utilizando la parte anterior.

Definimos $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ como $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$. Como h_1 y h_2 tienen igual derivada, h tiene derivada nula, es decir:

$$h'(x) = h_1'(x) - h_2'(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in (a, b)$$

Como h es la resta de dos funciones continuas en $[a, b]$, es continua en $[a, b]$ y como es resta de dos funciones derivables en (a, b), es derivable en (a, b). Estamos en las hipótesis de la parte anterior, gracias a lo que concluimos que h es constante, $h(x) = c = h(a)$. Pero por otra parte, por hipótesis $h_1(a) = h_2(a)$, por lo que:

$$h(x) = h(a) = h_1(a) - h_2(a) = 0$$

concluimos que la función h es constante 0: $h(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Como $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$ concluimos que $h_1(x) = h_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$.