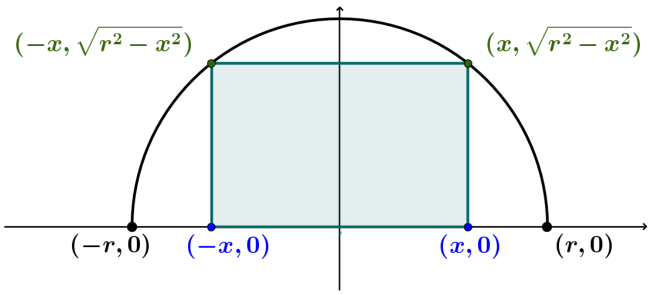
Problemas geométricos de optimización

Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.

Consideraremos un semicírculo de radio r con centro en el orígen del plano cartesiano y ubicado en el semiplano de $y \geq 0$. Por Pitágoras, los puntos de la semicircunferencia cumplen la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Despejando y se obtiene $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Como nos encontramos en el semiplano de y positivo nos quedamos sólo con la raíz positiva. Entonces los puntos de la semicircunferencia descrita son todos de la forma $(x, \sqrt{r^2 - x^2})$.

Ahora comenzaremos a determinar donde puede encontrarse un rectángulo inscripto en dicho semicírculo. Lo haremos fijando el vértice inferior derecho del rectángulo en el punto $(x, 0)$, con $0 \leq x \leq r$. A partir de ahí se determinan los otros vértices como $(x, \sqrt{r^2 - x^2})$, $(-x, \sqrt{r^2 - x^2})$, y $(-x, 0)$. Esto se aprecia en la imagen.



La base del rectángulo mide, pues, $2x$ y su altura es de $\sqrt{r^2 - x^2}$. Determinamos así una fórmula para su área exlusivamente en función de x:

$$A(x) = b(x) \cdot h(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Donde x varía entre 0 y r. Es sencillo ver que $A(x)$ es positiva en dicho rango y que $A(0) = A(r) = 0$, de donde $A(x)$ tiene un máximo en $(0, r)$. Para hallarlo derivamos A:

$$A'(x) = \left(2x\sqrt{r^2 - x^2}\right)' = (2x)'\sqrt{r^2 - x^2} + 2x\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)'$$

Hasta acá sólo hemos aplicado derivada del producto. Continuamos aplicando regla de la cadena para el segundo miembro, sabiendo que $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$A'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x\frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}(r^2 - x^2)' = 2\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x)$$

$$= \frac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

. Dado que buscamos un máximo, fijamos $A'(x) = 0$. Resolvemos dicha ecuación:

$$A'(x) = 0 \iff \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \iff 2r^2 - 4x^2 = 0 \iff r^2 = 2x^2 \iff x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Nótese que este es el x que hace que el rectángulo tenga el doble de base que altura (o que, en otras palabras, esté formado por dos cuadrados), y su área es:

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}r\sqrt{r^2 - \left(\frac{r^2}{2}\right)} = \sqrt{2}r\sqrt{\frac{r^2}{2}} = r^2$$