Ejercicios P11

Ejercicio 1.2

Calcular los extremos de las siguientes funciones en los dominios indicados.

d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ en [0,5]

Para comenzar observamos que la expresión está definida en todo el dominio al ser $x^2 + 1 \neq 0, \ \forall \ x \ \in \ [0, 5]$.

Nuestros candidatos a extremos se relalizan en 0, 5 y los puntos donde $f'(x) = 0$. Para esto derivamos:

$$f'(x) = \frac{x' \cdot (x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

Buscamos las raíces de la derivada y se menciona que el denominador tampoco se anula.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o } x = -1$$

Nuestra función está definida en [0,5] por lo que nuestro candidato a extremo es $x = 1$.

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = \frac{1}{2}$$
$$f(5) = \frac{1}{26}$$

Recordando que por el T. de Weierstrass la función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza sus valores mínimo y máximo en dicho intervalo obtenemos que 0 es mínimo y $\frac{1}{2}$ es máximo de la función.

e) $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x+a|}$ $a > 0$ en $\mathbb{R}$

Empezamos estudiando los límites en infinito de la función al estar definida en $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{1 + |\infty|} + \frac{1}{1 + |\infty + a|} = 0^+ + 0^+ = 0^+$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{1 + |-\infty|} + \frac{1}{1 + |-\infty + a|} = 0^+ + 0^+ = 0^+$$

La función es siempre positiva y observando los límites inferimos que la función no tiene mínimo, ver que cuando $|x|$ aumenta, $f(x)$ se hace cada vez más pequeño.

Podemos definir la función de la siguiente manera aplicando la definición de valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x-a} & x < -a \\ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x+a} & -a \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x+a} & 0 < x \end{cases}$$

Para hallar el máximo debemos derivar, teniendo como precaución que pueden existir puntos donde no exista la derivada.

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x-a)^2} & \text{si } x < -a & (1) \\ \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x+a)^2} \text{ si} & -a < x < 0 & (2) \\ \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x+a)^2} & \text{si } 0 < x & (3) \end{cases}$$

La derivada de f es continua en sus tres tramos por ser funciones polinómicas, no obstante debemos concluir que no es derivable en $x = -a$ y $x = 0$ al tener límites laterales distintos:

$$\lim_{x \to -a^-} f'(x) = \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+a-a)^2}$$
$$\lim_{x \to -a^+} f'(x) = \frac{1}{(1+a)^2} - \frac{1}{(1-a+a)^2}$$
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1 - \frac{1}{(1+a)^2}$$
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1 - \frac{1}{(1+a)^2}$$

Tomamos como candidatos donde se realiza el máximo estos dos puntos además de las raíces de la derivada. Buscamos raíces de la derivada como candidatos a máximo, (1) y (3) no tienen raíces reales (basta utilizar fórmula de Bhaskara y ver que el determinante es negativo) y (2) tiene como raíz $x = \frac{-a^2-2a}{4+2a}$.

Nuestros tres candidatos son $x = -a$, $x = \frac{-a^2-2a}{4+2a}$ y $x = 0$.

$$f(-a) = \frac{1}{1+a} + 1$$
$$f\left[\frac{-a^2-2a}{4+2a}\right] = \frac{1}{1 - \frac{-a^2-2a}{4+2a}} + \frac{1}{1 + a + \frac{-a^2-2a}{4+2a}} = \frac{1}{\frac{a^2+4a+4}{4+2a}} + \frac{1}{\frac{a^2+4a+4}{4+2a}} = \frac{8+4a}{a^2+4a+4}$$
$$f(0) = 1 + \frac{1}{1+a}$$

Se ve que $f(-a) = f(0)$, solo resta distinguir si esto es mayor a $f(\frac{-a^2-2a}{4+2a})$ o no.

$$1 + \frac{1}{1+a} > \frac{8+4a}{a^2+4a+4}$$
$$\frac{2+a}{1+a} > \frac{8+4a}{a^2+4a+4}$$
$$2a^2 + 8a + 8 + a^3 + 4a^2 + 4a > 8 + 4a + 8a + 4a^2$$
$$2a^2 + a^3 > 0$$

Y esto último es cierto ya que por hipótesis $a > 0$.

Concluímos de esta forma que la función no tiene mínimo y el maximo se realiza en $x = -a$ y $x = 0$.