Resluciones aplicando regla de la cadena

1. Ejercicio 2.1

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

k) $\sin\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right)$

$\sin\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right) = \sin(x) \circ e^{\frac{x+1}{x-2}}$. Entonces, aplicando la regla de la cadena:

$$\left(\sin(e^{\frac{x+1}{x-2}})\right)' = \left(\sin'(x) \circ \left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right)\right) \cdot \left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right)' = \cos\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right) \cdot \left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right)'$$

Donde aquí utilizamos el hecho $(sin(x))' = cos(x)$. A su vez, $e^{\frac{x+1}{x-2}} = e^x \circ \frac{x+1}{x-2}$, y entonces puede aplicarse otra vez la regla de la cadena:

$$\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right)' = (e^x)'\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{x-2}\right)' = e^{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-2}\right)'$$

Donde aquí hemos de nuevo hecho uso de una derivada ya conocida ($(e^x)' = e^x$), y ahora basta aplicar la regla de derivada del cociente para el lado derecho:

$$\left(\frac{x+1}{x-2}\right)' = \frac{(x+1)' \cdot (x-2) - (x+1) \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}$$

Aquí lo que se ha usado es que la derivada de un polinomio de primer grado es igual al coeficiente que multiplica a la variable. Finalmente, acoplando todos los resultados anteriores:

$$\left(\sin\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right)\right)' = \cos\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right) \cdot \left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right)' = \cos\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right) \cdot e^{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-2}\right)' = -\frac{3 \cdot \cos\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right) \cdot e^{\frac{x+1}{x-2}}}{(x-2)^2}$$

2. Ejercicio 2.3

Halle f' en función de g y g' para los siguientes ejemplos.

e) $f(x) = g(xg(a))$

Aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = g'(xg(a)) \cdot (xg(a))'$$

Ahora, nótese que el símbolo a NO representa una variable, y por tanto $g(a)$ es en realidad una constante, la cual multiplica a x. De esta manera, $g(a)$ puede salir para "afuera" de la derivada:

$$f'(x) = g'(xg(a)) \cdot g(a) \cdot (x)' = g'(xg(a)) \cdot g(a)$$

Y esto es tan lejos como se puede llegar sin conocer g.