Ejercicios P10

Ejercicio 3.2

Sea $C(p, r)$ el circulo de centro p y radio r. Probar que para todo $q \in C(p, r)$ se tiene que la recta tangente a $C(p, r)$ por q es perpendicular a la recta por p y q.

Sea $p = (a, b)$, la ecuación del círculo queda determinada entonces por $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$. Dejamos la y en función de x:

$$\begin{aligned}
(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\
(y-b)^2 &= r^2 - (x-a)^2 \\
(y-b) &= \pm\sqrt{r^2 - (x-a)^2} \\
y &= b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Sea $q = (c, d) \in C(p, r)$, por lo que cumple:

$$(c-a)^2 + (d-b)^2 = r^2 \qquad (2)$$

La ecuación de la recta entre p y q está dada por:

$$y = \frac{d-b}{c-a} \cdot (x-a) + b \qquad (3)$$

Resulta entonces que la pendiente de la recta entre p y q es $m = \frac{d-b}{c-a}$, y recordamos que la recta perpendicular está caracterizada por su pendiente $m_p = -\frac{1}{m}$. Por lo tanto, $m_p = -\frac{c-a}{d-b}$.

Derivamos (1)

$$y'(x) = \pm\frac{x-a}{\sqrt{r^2 - (x-a)^2}} \qquad (4)$$

Como buscamos la recta tangente en $x = c$, lo sustituimos, además de sustituir r^2 (por (2)).

$$\begin{aligned}
y'(c) &= \pm\frac{c-a}{\sqrt{r^2 - (c-a)^2}} \\
y'(c) &= \pm\frac{c-a}{\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2 - (c-a)^2}} \\
y'(c) &= \pm\frac{c-a}{\sqrt{(d-b)^2}} \\
y'(c) &= \pm\frac{c-a}{|(d-b)|}
\end{aligned} \qquad (5)$$

Solo resta discriminar en los casos dependiendo de si $c < a$ o $c > a$ y $d < b$ o $d > b$ y observar que se cumple la condición de perpendicularidad entre las rectas.

Ejercicio 3.7

Encuentre el centro del círculo de radio 1 inscripto en la parábola $y = x^2$.

El círculo tiene su centro sobre el eje y y radio 1, por lo que su ecuación queda determinada como:

$$x^2 + (y-k)^2 = 1$$
$$y = k \pm \sqrt{1-x^2} \tag{1}$$

Nos resta hallar k de forma de determinar el centro.

Observando la imágen vemos que la parábola es tangente a la circunferencia en dos puntos por lo que imponemos la igualdad entre las derivadas de ambas curvas.

$$\pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 2x \tag{2}$$

Del lado izquierdo la derivada de la curva de la circunferencia y del lado derecho la de la parábola.

Operamos en esta igualdad y llegamos a dos raíces, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se menciona que el $\pm$ no afecta al resultado previo. Estos son los x en los que se da el contacto.

Como estos x pertenecen a la parábola, $y = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$. Sustituimos con $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = \frac{3}{4}$ en (1).

$$\frac{3}{4} = k \pm \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2} \tag{3}$$

Despejamos y llegamos a $k = 1/4$ o $k = 5/4$, es este último el que genera la circunferencia de la imágen de centro $(0, \frac{5}{4})$.