Integrales de funciones racionales

1. Calcular las integrales

$$a) \int_2^5 \frac{1}{2x}\,dx \qquad b) \int_1^5 \frac{1}{x+1}\,dx \qquad c) \int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx$$

En este ejercicio vamos a asumir que:

$$\int_a^b \frac{1}{x}.dx = L(x)\big|_a^b = L(b) - L(a),$$

para cualquier par $a, b \in \mathbb{R}^+$. La definición de esta función esta en el práctico.

a) $\int_2^5 \frac{1}{2x}.dx \underbrace{=}_{Linealidad} \frac{1}{2}.\int_2^5 \frac{1}{x}.dx = \frac{1}{2}L(x)\big|_2^5 = \frac{1}{2}\left[L(5) - L(2)\right]$

b) Usando Cambio de Variable Lineal: $\int_a^b f(x).dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x-p).dx$
y considerando: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad a = 2 \quad b = 6 \quad p = -1$ obtenemos que:

$\int_1^5 \frac{1}{x+1}.dx = \int_{2-1}^{6-1} \frac{1}{x-(-1)}.dx \underbrace{=}_{C.V.} \int_2^6 \frac{1}{x}.dx = L(x)\big|_2^6 = L(6) - L(2)$

c) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} = \int_0^1 \frac{x+1-1-1}{x+1} = \int_0^1 \left[\frac{x+1}{x+1} + \frac{-2}{x+1}\right].dx = \underbrace{=}_{Linealidad} \int_0^1 1.dx + \int_0^1 \frac{-2}{x+1}.dx =$
$\underbrace{=}_{Linealidad} 1 - 2.\int_0^1 \frac{1}{x+1}.dx$

Usando Cambio de Variable Lineal: $\int_a^b f(x).dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x-p).dx$

Y considerando: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad a = 1 \quad b = 2 \quad p = -1$ obtenemos que:

$\int_0^1 \frac{1}{x+1}.dx = \int_{1-1}^{2-1} \frac{1}{x-(-1)}.dx \underbrace{=}_{C.V.} \int_1^2 \frac{1}{x}.dx = L(x)\big|_1^2 = L(2) - L(1) = L(2)$

Entonces:

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} = 1 - 2.L(2)$$