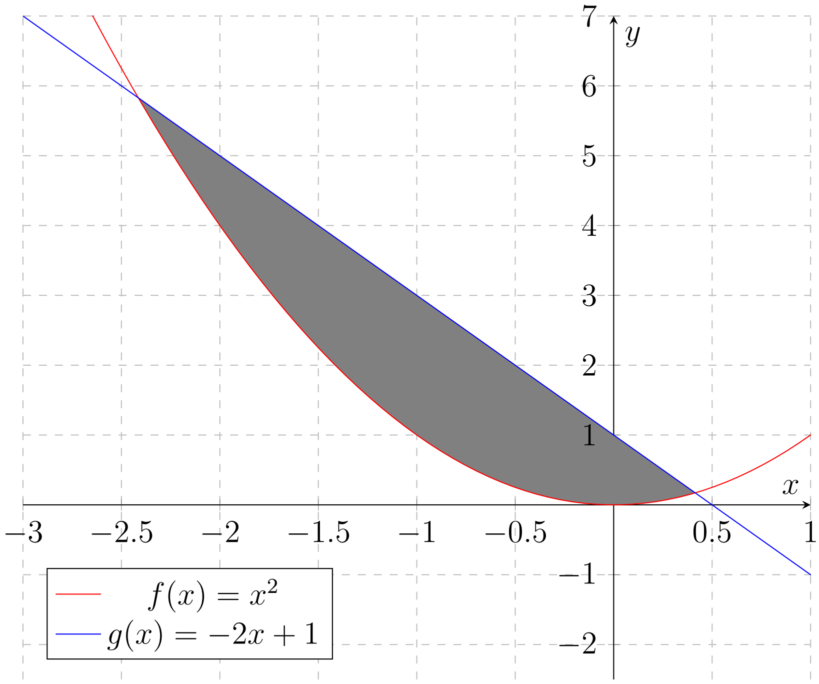
Cálculo de area encerrada entre curvas

Calcular el área encerrada por los gráficos de f y g en los siguientes casos:

1) $f(x) = x^2, \; g(x) = -2x + 1$



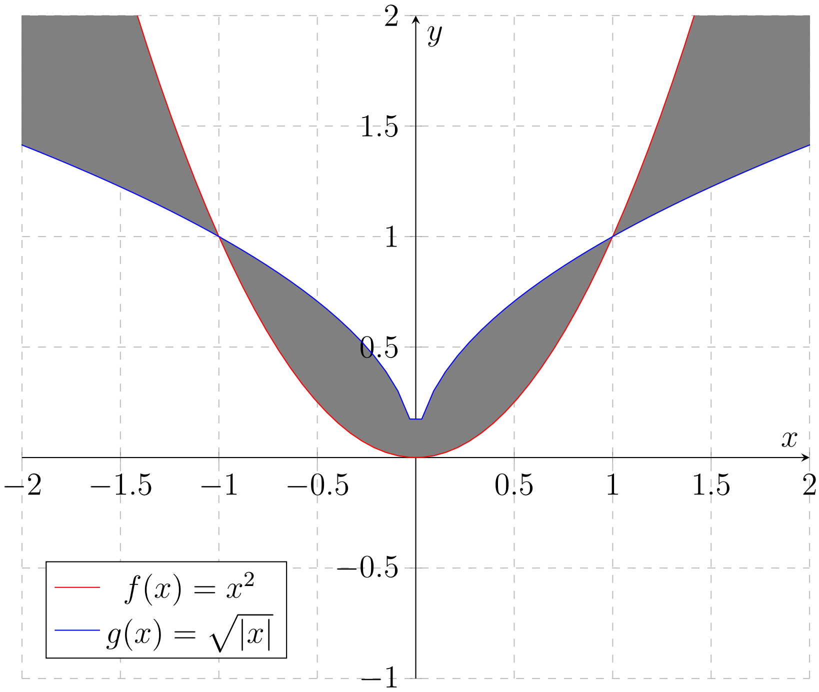
Debemos calcular el área encerrada entre las gráficas así que como primera medida (a pesar de que no se solicita) realizamos una pequeña gráfica de nuestras curvas y el área a calcular. Lo más importante a observar en esto, es ver que función va “por arriba” y cual va “por abajo” y los puntos que se intersectan las curvas, osea, los puntos que delimitan el área.

Las curvas se cruzan cuando $x^2 = -2x + 1$, esto es, en $x = -1 - \sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2} - 1$ y el área es el área de la función de arriba en el intervalo menos el área de la función de abajo.

$$\int_{-1-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-1} -2x + 1 \, dx - \int_{-1-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-1} x^2 \, dx = \int_{-1-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-1} -2x + 1 - x^2 \, dx = \left[-\frac{2x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_{-1-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-1} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Es de mencionar que el caso en que el área sea por debajo del eje x, las nociones de arriba y abajo de las funciones se invierten. En definitiva, le restamos a la integral de la función que está más alejada del eje la de la función mas cercana al mismo. Además se debe cambiar el signo porque estamos buscando áreas. Todo esto se puede ver en la parte c) de este mismo ejercicio.

2) $f(x) = x^2, \; g(x) = \sqrt{|x|}$



Las curvas se cruzan cuando $x^2 = \sqrt{|x|}$, esto es, en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$. La gráfica realizada por el programa no logra llegar con la función $\sqrt{|x|}$ a $x = 0$, pero es claro que $\sqrt{|0|}$ es 0.

Vemos la simetría de la gráfica y de esta forma calculamos el área como el área entre las curvas entre 0 y 1 y la multiplicamos por 2. En este intervalo $\sqrt{|x|}$ es lo mismo que $\sqrt{x}$. Recordamos además que para integrar valores absolutos es menester discriminar en casos.

$$2 \cdot \left[\int_0^1 \sqrt{|x|} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx \right] = 2 \cdot \left[\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \, dx \right] = 2 \cdot \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$