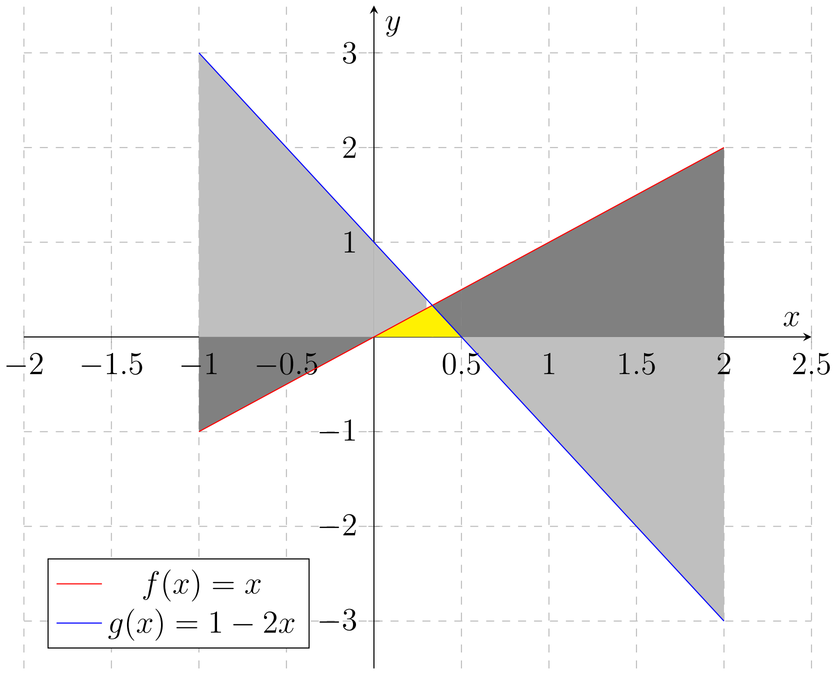
Ejercicios P04

Ejercicio 1.7

Calcule el área de la región S comprendida entre las gráficas de f y g, en el intervalo indicado para cada caso. Bosquejar en cada caso las dos gráficas y sombrear S.

b) $f(x) = x, \ g(x) = 1 - 2x$ en $[-1, 2]$



La región S entre las gráficas a la que le calcularemos el área es la suma de las áreas en gris claro y gris oscuro.

Primero calculamos las áreas de los triángulos que se encuentran por debajo del eje x. Observar que le asignamos un signo negativo ya que queremos el área con un signo positivo y al estar debajo del eje debemos cambiar el signo.

- Área triángulo oscuro

$$-\int_{-1}^{0} x\,dx = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Área triángulo claro

$$-\int_{0.5}^{2} 1 - 2x\,dx = \frac{1,5 \cdot 3}{2} = \frac{9}{4}$$

Para el área por encima del eje x sumamos el área del triángulo de color gris claro y parte amarilla de vértices (-1,0; 0.5,0; -1,3) y el triángulo de color gris oscuro y parte amarilla de vértices (0,0; 2,0; 2,2). Pero al hacer esto sumamos dos veces el área amarilla que no es parte de S, por lo que luego la restamos dos veces.

Observamos que las gráficas se cortan cuando $x = 1 - 2x$, osea en $x = \frac{1}{3}$.

- Área triángulo claro + triángulo amarillo

$$\int_{-1}^{0,5} 1 - 2x\,dx = \frac{1,5 \cdot 3}{2} = \frac{9}{4}$$

- Área triángulo oscuro + triángulo amarillo

$$\int_{0}^{2} x\,dx = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

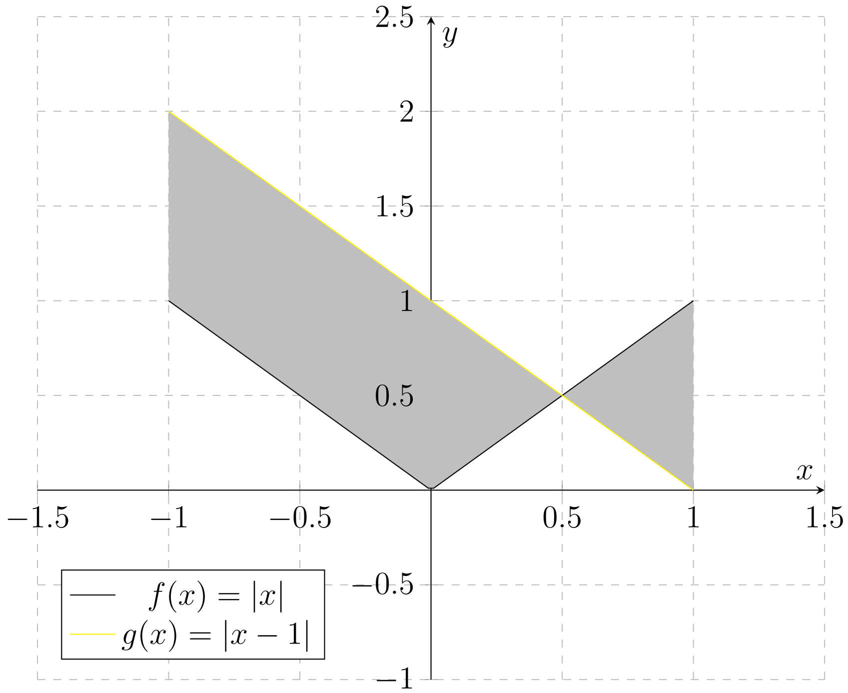
- Triángulo amarillo

$$\int_{0}^{\frac{1}{3}} x\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^{0,5} 1 - 2x\,dx = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{2} + \frac{(0,5 - \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$

Es así que el área S termina siendo:

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 2 - 2 \cdot \frac{3}{36} = \frac{18 + 81 + 81 + 72 - 6}{36} = \frac{246}{36} = \frac{41}{6}$$

c) $f(x) = |x|,\ g(x) = |x - 1|$ en $[-1, 1]$



La región S entre las gráficas a la que le calcularemos el área es el área en gris claro.

Primero calculamos el área por debajo de $|x - 1|$ como el área del trapecio de bases 1 y 2 y altura 1 y le restamos el área por debajo de $|x|$ que es la del triángulo de base y altura 1 para de esta forma obtener el área S gris hasta el eje y.

- Área gris hasta eje y

$$\int_{-1}^{0} |x - 1|\,dx - \int_{-1}^{0} |x|\,dx = \frac{(1 + 2) \cdot 1}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} = 1$$

Para el área de S posterior al eje y la calculamos como la suma de las integrales entre 0 y 1 de ambas funciones, restando posteriormente dos veces el triángulo blanco de vértices (0,0; 1,0; 0.5,0.5).

Observar que lo restamos dos veces porque en cada una de las integrales anteriores lo habíamos sumado una vez.

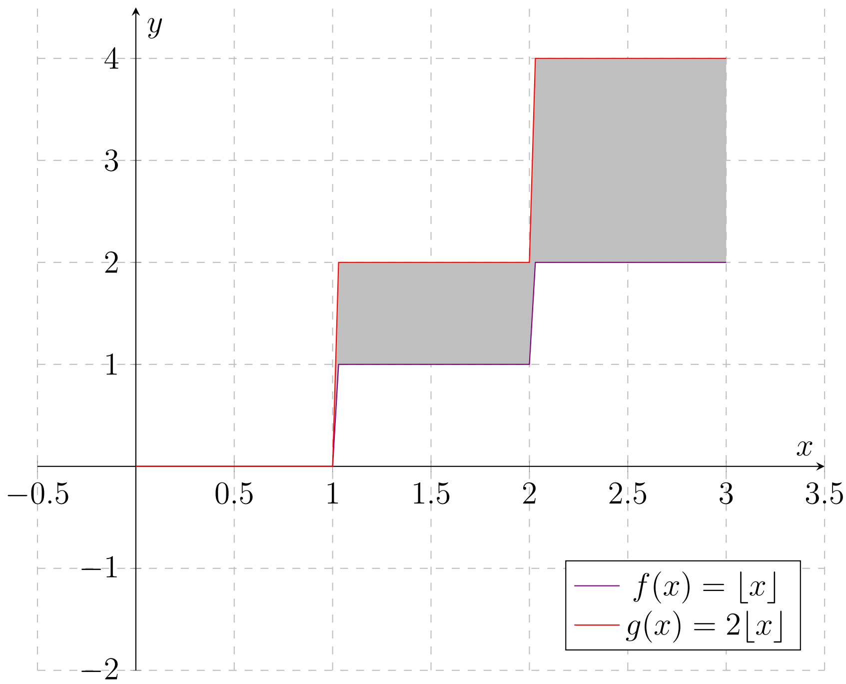
- Área gris entre $x = 0$ y $x = 1$

$$\int_1^1 |x-1|\,dx + \int_0^1 |x|\,dx - 2 \cdot \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Es así que el área S termina siendo:

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

e) $f(x) = \lfloor x \rfloor,\ \ g(x) = 2\lfloor x \rfloor$ en $[0, 3]$



Vemos que las funciones coinciden en [0,1) por lo que nos centraremos en el intervalo [1,3]. Además el área S se puede ver como la integral de $g(x)$ en [1,3] menos la integral de $f(x)$ en ese mismo intervalo. Y estas mismas como los rectángulos por debajo de la curva.

- Área S

$$\int_1^3 2\lfloor x \rfloor\,dx - \int_1^3 \lfloor x \rfloor\,dx = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 3$$