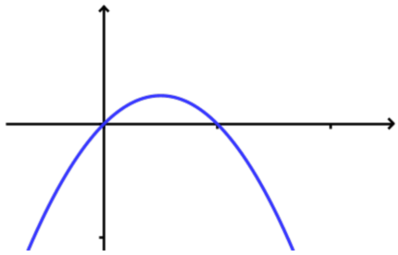
Resolución del ejercicio 1.3 del Práctico Semana 4

UdelaR/FIng/IMERL

3 de abril de 2020

1. **¿Qué valores de a y b, $a < b$, maximizan el valor de la integral $\int_a^b x - x^2 dx$?**

   Primero observemos la gráfica de $f(x) = x - x^2$



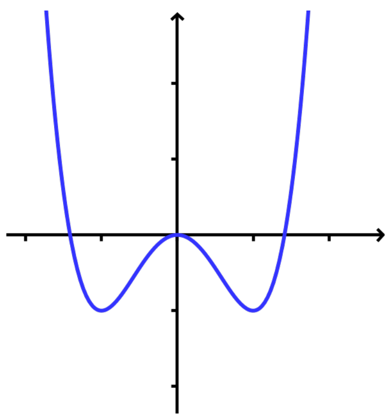
   Afirmación: el máximo se da en $a = 0$, $b = 1$, es decir, las raíces de f.

   - Si $b < 0$ o $a > 1$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx < 0$. Luego como $\int_0^1 f(x) \geq 0$ tenemos que $\int_0^1 f(x) \geq 0 > \int_a^b f(x)\,dx$
   - Si $a < 0 \leq b$ entonces
   $$\int_a^b f(x) = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx < \int_0^b f(x)\,dx$$
   donde la última desigualdad se da porque $f(x) < 0$ para todo $x < 0$.
   - Si $b > 1 \geq a$ entonces
   $$\int_a^b f(x) = \int_a^1 f(x)\,dx + \int_1^b f(x)\,dx < \int_a^1 f(x)\,dx$$
   donde la última desigualdad se da porque $f(x) < 0$ para todo $x > 1$.

   Concluimos así que
   $$\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$$
   para todo par $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y por tanto el máximo se realiza en $a = 0$ y $b = 1$

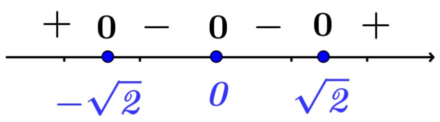
2. **¿Qué valores de a y b, $a < b$, minimizan el valor de la integral $\int_a^b -2x^2 + x^4\,dx$?**

   Primero observemos el gráfico de $f(x) = -2x^2 + x^4$



Dado que el signo de f tiene un comportamiento análogo al de la parte anterior basta encontrar las raíces de la función f.

Como f es un polinomio sin término independiente 0 es raíz, luego factorizando en x tenemos que las otras raíces son $\pm\sqrt{2}$



signo de f

Tenemos asi que el mínimo se realiza en $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$