Calculo de supremo e ínfimo en operaciones de conjuntos

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$ y $A + B = \{a + b : a \in A$ y $b \in B\}$.

Usualmente ocurre que es más cómodo demostrar que un real es supremo o ínfimo usando condiciones equivalentes a la definición.
La siguientes afirmaciones son equivalentes, para un conjunto $A \subset \mathbb{R}$:

S-I) α es el supremo de A.

S-II) α es cota superior de A y $\forall \delta > 0$, $\exists a \in A$ tal que $a \in (\alpha - \delta, \alpha]$ (es decir $\alpha - a < \delta$.).

Análogamente son equivalentes:

I-I) α es el ínfimo de A.

I-II) α es cota inferior de A y $\forall \delta > 0$, $\exists s \in A$ tal que $a \in [\alpha, \alpha + \delta)$ (es decir $a - \alpha < \delta$).

a) 1) **Si $A \subset B$ y B acotado demostrar que $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.**
Veamos primero que los valores a estudiar están bien definidos.
Si B está acotado tiene supremo (por Axioma de Completitud) e ínfimo (se deduce del Axioma de Completitud) bien definidos. Veamos ahora para A. Sea c es una cota inferior de B, por definición $\forall b \in B, c \leq b$. Luego $\forall a \in A$ tenemos que $a \in B$ (por la inclusión $A \subset B$), entonces $c \leq a$ y c es cota inferior de A. Análogamente razonamos con las cotas superiores. Por tanto A también está acotado y existen $\sup(A)$ e $\inf(A)$.
Del argumento anterior tenemos que toda cota inferior de B es cota inferior de A en particular $\inf(B)$ es cota inferior de A, por tanto como $\inf(A)$ es la mayor de las cotas inferiores, $\inf(B) \leq \inf(A)$. Análogamente deducimos que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Finalmente para demostrar que $\inf(A) \leq \sup(A)$ alcanza con considerar $a_0 \in A$ (recordemos que A es no vacío por lo que existe a_0). Como $\inf(A)$ es cota inferior, $\inf(A) \leq a_0$. Análogamente $a_0 \leq \sup(A)$, y por transitividad obtenemos el resultado desado.

2 **Dar un ejemplo donde $A \subset B$, B acotado e $\inf(B) = \inf(A) < \sup(A) < \sup(B)$.**
Basta tomar como ejemplo $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$.

b) 1) **Si $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $b \in B$, demostrar que $\sup(A) \leq \inf(B)$**
Por absurdo, supongamos que $\sup(A) > \inf(B)$.
La intuición es que, podemos encontrar un $a \in A$ tan cercano a $\sup(A)$ como queramos, y un $b \in B$ tan cercano a $\inf(B)$ como queramos. De forma tal que $b < a$, contradiciendo la hipótesis.
Formalmente, sea $a \in A$ tal que $sup(A) - a < \frac{sup(A)-inf(B)}{2}$ (Por S-II con $\delta = \frac{sup(A)-inf(B)}{2} > 0$). Análogamente consideramos $b \in B$ tal que $b - inf(B) < \frac{sup(A)-inf(B)}{2}$. Sumando miembro a miembro y usando las propiedades de orden:

$$\frac{sup(A) - inf(B)}{2} + \frac{sup(A) - inf(B)}{2} = sup(A) - inf(B) > sup(A) - a + b - inf(B) \geq sup(A) - inf(B) + b - a$$

De donde $0 > b - a$ y por tanto $b < a$ lo que es abusrdo. El absurdo viene de suponer que $sup(A) > inf(B)$, por tanto $sup(A) \leq \inf(B)$ como queríamos.

2) **Dar un ejemplo donde $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$ y $\sup(A) = \inf(B)$**
Basta tomar como ejemplo $A = [0, 1]$, $B = (1, 2]$.

c) 1) **Probar que si A y B son acotadas entonces** $\inf(A+B) = \inf(A)+\inf(B)$ **y** $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$

Vamos a demostrar que $\inf(A)+\inf(B)$ es el ínfimo de $A+B$, usando la condición I-II. El caso del supremo es análogo. Primero probemos que $\inf(A)+\inf(B)$ es cota inferior de $A+B$. Como $\inf(A)$ es cota inferior de A, $\forall a \in A$ tenemos que $\inf(A) \leq a$ (1). Análogamente como $\inf(B)$ es cota inferior de B, $\forall b \in B$, $inf(B) \leq b$ (2).

Sea $x \in A+B$ se cumple $x = a_x + b_x$ para algún $a_x \in A$, $b_x \in B$. Por tanto por (1), en particular[1] $\inf(A) \leq a_x$ y análogamente $\inf(B) \leq b_x$. Sumando miembro a miembro $\inf(A)+\inf(B) \leq a_x + b_x = x$. Como x era arbitrario, deducimos que $\forall x \in A+B$, $\inf(A)+inf(B) \leq x$ por lo que $inf(A)+inf(B)$ es una cota inferior, como queríamos. Por otra parte, para los ínfimos por hipótesis se cumple:

$$\forall \delta > 0, \exists a \in A \text{ tal que } a_\delta - \inf(A) < \frac{\delta}{2}$$

Nótese que elegimos $\frac{\delta}{2}$ para tener δ en la definición final (para $\inf(A+B)$). Podríamos escribir esto con cualquier constante, dado que la desigualdad se cumple para cualquier $\delta > 0$.

También:

$$\forall \delta > 0, \exists b \in B \text{ tal que } b_\delta - \inf(B) < \frac{\delta}{2}$$

Dado δ, construimos $x \in A+B$ eligiendo un par a_δ y b_δ, siendo $x = a_\delta + b_\delta$. Sumando miembro a miembro:

$$a_\delta - inf(A) + b_\delta - inf(B) = a_\delta + b_\delta - (inf(A) + inf(B)) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Entonces finalmente:

$$\forall \delta > 0, \exists x \in A+B \text{ tal que } x_\delta - (\inf(A)+\inf(B)) < \delta$$

Demostramos entonces (condición I-II) que $\inf(A)+\inf(B) = inf(A+B)$.

d) 1) **Probar que si A esta acotado y $\alpha > 0$ entonces** $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$

Usamos la condición S-II. Para demostrar que $\alpha \sup(A)$ es el supremo de αA, Primero probamos que es cota superior.

Para cualquier $x \in A$, $x \leq \sup(A)$, por tanto para cuaquier $y \in \alpha A$, como $y = \alpha x$ para algún $x \in A$, tenemos (multiplicando ambos lados de la desigualdad, observando que $\alpha > 0$) que $y = \alpha x \leq \alpha \sup(A)$.

Por otra parte, se verifica:

$$\forall \delta > 0, \exists a \in A \text{ tal que } sup(A) - a < \frac{\delta}{\alpha}$$

Por tanto, dado un $y \in \alpha A$, como $y = \alpha x$ con $x \in A$, se satisface (multiplicando la desigualdad anterior por α):

$$\forall \delta > 0, \exists y \in \alpha A \text{ tal que } (\alpha \sup(A)) - y < \delta$$

[1] Nótese que (1) se cumple para **todo** $a \in A$, por tanto puedo instanciar el teorema para cualquier elemento en particular (por ejemplo a_x)