Inecuaciones

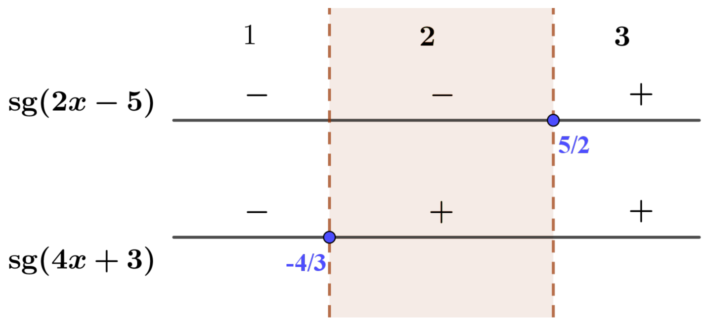
Determinar para qué valores de x es cierta la siguiente inecuación:

$$|2x-5|<|3x+4|$$

Solución:
Recordemos la definición de valor absoluto:

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Observemos que esta función está definida por tramos, la expresión algebraica depende del signo de x. Para decidir cuanto vale $|2x-5|$, estudiamos el signo de $2x-5$. Si $2x-5\geq 0$ entonces $|2x-5|=2x-5$. De lo contrario $|2x-5|=-2x+5$, el opuesto. Análogamente, razonamos para $3x+4$.



El dominio nos queda dividido entonces en tres regiones:

1. Si $x\in\left(-\infty,\frac{-4}{3}\right)$ tenemos que $|2x-5|=-2x+5$ y que $|3x+4|=-3x-4$. La ecuación a estudiar en este intervalo es $-2x+5<-3x-4$. Reduciendo:

$$\begin{aligned} -2x+5 &<-3x-4 && \iff \\ 5+4 &<-3x+2x && \iff \\ 9 &<-x && \iff \\ x &<-9 \end{aligned}$$

La solución obtenida **solo tiene sentido en la región estudiada**, por tanto para la solución final nos interesa el conjunto

$$(-\infty,-9)\cap\left(-\infty,\frac{-4}{3}\right)=(-\infty,-9)$$

(La solución obtenida, intersección la región estudiada, en este caso da lo mismo).

2. Si $x\in\left[\frac{-4}{3},\frac{5}{2}\right)$ tenemos que $|2x-5|=-2x+5$ y que $|3x+4|=3x+4$. La ecuación a estudiar en este intervalo es $-2x+5<3x+4$. Reduciendo:

$$\begin{aligned} -2x+5 &<3x+4 && \iff \\ 5-4 &<3x+2x && \iff \\ 1 &<5x && \iff \\ x &>\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Por tanto **en la región** la solución es $\left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{5}\right\}$, y aporta a la solución total el conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{5}\right\} \cap \left[\frac{-4}{3}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{5}{2}\right)$$

(Una vez más es la solución obtenida, intersección la región estudiada, en este caso queda clara la diferencia).

3. Si $x \in \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$ tenemos que $|2x-5| = 2x-5$ y que $|3x+4| = 3x+4$. La ecuación a estudiar en este intervalo es $2x-5 < 3x+4$. Reduciendo:

$$\begin{aligned} 2x-5 &< 3x+4 && \iff \\ -5-4 &< 3x-2x && \iff \\ x &> -9 \end{aligned}$$

Por tanto en la región la solución es $\{x \in \mathbb{R} : x > -9\}$, y aporta a la solución total al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x > -9\} \cap [\frac{5}{2}, +\infty) = [\frac{5}{2}, +\infty)$

Finalmente, el conjunto solución está dado por la unión de las soluciones de cada intervalo, y es el conjunto:

$$(-\infty, -9) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) = (-\infty, -9) \cup \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$$