Composicion y suma (ejemplo: funciones partidas)

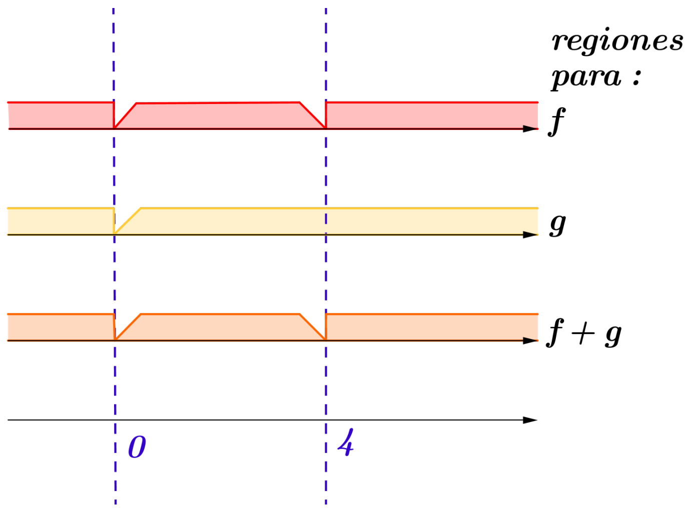
Para

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x}{2} & 0 < x < 4\,, \\ 1-x & x \ge 4 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x+3 & x \le 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

Calculamos $f+g$ y $f \circ g$.

Resolución de f+g :

Como las expresiones algebraicas de f y g están definidas por segmentos, las de $f+g$ estará definida en segmentos, combinando las particiones.



Tenemos que definir entonces $f+g$ en $(-\infty, 0]$, $(0,4)$, y $[4,+\infty)$

1. Para $x \in (-\infty, 0]$ tenemos que f y g se computan a partir de las expresiones $f(x) = 0$ y $g(x) = x+3$. Luego $(f+g)(x) = 0 + x + 3$.

2. Para $x \in (0,4)$, $f(x) = \frac{x}{2}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Luego $(f+g)(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+2}{2x}$.

3. Para $x \in [4,\infty)$, $f(x) = 1-x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Luego $(f+g)(x) = 1 - x + \frac{1}{x} = \frac{-x^2+x+1}{x}$

Finalmente

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x+3 & x \le 0 \\ \frac{x^2+2}{2x} & 0 < x < 4\,, \\ \frac{-x^2+x+1}{x} & x \ge 4 \end{cases} \qquad \square$$

Resolución de $f \circ g$:

Para hallar la composición aplicamos g y luego f al resultado ($(f \circ g)(x) = f(g(x))$).

Notemos que

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0 & g(x) \le 0 \\ \frac{g(x)}{2} & 0 < g(x) < 4\,, \\ 1 - g(x) & g(x) \ge 4 \end{cases}$$

Estudiamos entonces para $x \in \mathbb{R}$ cuando el valor $g(x)$ pertenece a cada intervalo de las expresiones algebraicas de f, Según los casos de la definición de g tenemos que:

1. - Si $x \leq 0$ entonces $g(x) = x + 3$. A continuación estudiamos cuando $x + 3 \leq 0$, cuando $0 < x + 3 < 4$ y cuando $x + 3 \geq 4$ para ver qué expresión algebraica usar para $f(g(x))$. La forma sistemática de hacer esto es estudiar las soluciones de estas inecuaciones (el caso $0 < x + 3 < 4$ es en realidad un sistema de dos inecuaciones). Tenemos que $x + 3 \leq 0$ sii $x \leq -3$. Observemos que ésta solución hallada tiene sentido en el intervalo que estamos estudiando ($(-\infty, 0]$), y en este caso como la solución está incluida en el mismo no se agrega ninguna nueva restricción. Para estos valores de x entonces aplicamos la definición de f, y tenemos entonces que $f(g(x)) = 0$.
   - Por otro lado es sencillo ver que si $x > -3$ (y además sabemos que $x < 0$), $x+3$ cumple que $0 < x-3 < 4$ y por tanto si $-3 < x \leq 0$ luego $f(g(x)) = \frac{x+3}{2}$.

2. Si $x > 0$ entonces $g(x) = \frac{1}{x}$.
   - La inecuación $\frac{1}{x} \leq 0$ no tiene soluciones positivas, no vamos a aplicar nunca f según este segmento.
   - La condición $0 < \frac{1}{x} < 4$ se cumple si $x > \frac{1}{4}$. Para estos valores de x entonces $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2x}$.
   - Finalmente $\frac{1}{x} \geq 4$ se satisface cuando $x \leq \frac{1}{4}$, por tanto $(g \circ f)(x) = 1 - \frac{1}{x}$ en $\left(0, \frac{1}{4}\right]$

Entonces $g \circ f$ queda definifa como:

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -3 \\ \frac{x+3}{2} & -3 < x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{x} & 0 < x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2x} & x > \frac{1}{4} \end{cases}$$