COMPOSICIÓN Y SUMA DE FUNCIONES "PARTIDAS"

Consideremos dos funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

. $$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 \ , \ x \in (-\infty, 1) \\ -x \ , \ x \in [1, +\infty) \end{cases} \quad \text{y } g(x) = \begin{cases} x^2 \ , \ x \in (-\infty, 0] \\ x + 1 \ , \ x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Ejercicio: Graficarlas.

Veamos en primer lugar como sumarlas:
Está claro que la función $f + g$ va a depender de como toman las imágenes f y g por separado. La imagen de f cambia su expresión en $x = 1$, mientras que g cambia su expresión en $x = 0$. Esto quiere decir que la función suma va a tomar imágenes según x sea menor que 0, esté entre 0 y 1 o sea mayor que uno. Así, la función suma va a estar dada por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} (e^x - 1) + (x^2) \ , \ x \in (-\infty, 0] \\ (e^x - 1) + (x + 1) \ , \ x \in (0, 1) \\ (-x) + (x + 1) \ , \ x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Ejercicio: Bosquejar el gráfico de $f + g$.

Veamos ahora como componerlas:
Por definición, la función compuesta de f con g que anotamos como $f \circ g$ está dada por $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$. Si lo escribimos explícitamente para las funciones que aparecen arriba queda:

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = \begin{cases} e^{g(x)} - 1 \ , \ g(x) \in (-\infty, 1) \\ -g(x) \ , \ g(x) \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Enfatizamos que solamente aplicamos la definición hasta ahora.

Para encontrar la expresión explícita de la imagen de la función compuesta tenemos que comparar entonces la posición de g en relación a 1 que es lo que obtuvimos en las regiones de definición de la función compuesta. Mirando el gráfico de g concluímos que $g(x) \in (-\infty, 1) \Leftrightarrow x \in (-1, 0]$ y que $g(x) \in [1, +\infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$.
Teniendo cuidado además de que g tiene dos expresiones distintas en la región donde es mayor o igual que 1, determinamos entonces que la función compuesta es:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} e^{x^2} - 1 \ , \ x \in (-1, 0] \\ -x^2 \ , \ x \in (-\infty, -1] \\ -(x + 1) \ , \ x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Ejercicio: Bosquejar el gráfico de $f \circ g$.
Ejercicio: Determinar $g \circ f$ y bosquejar su gráfico. Solución:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (e^x - 1)^2 \ , \ x \in (-\infty, 0] \\ -x + 1 \ , \ x \in [1, +\infty) \\ e^x \ , \ x \in (0, 1) \end{cases}$$

Juan C. Morelli - I.M.E.R.L.