Cálculo de raíces de polinomios especiales

Cálculo de raíces a partir de otra conocida

Calcular las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ sabiendo que 1 es una raíz.
Solución:
Al ser un polinomio de tercer grado y nosotros tener como dato que 1 es raíz, utilizaremos la llamada Regla de Ruffini para descomponer el polinomio. Lo descompondremos en el binomio $(x-1)$, por ser 1 raíz, y en un polinomio de grado 2.

	1	-1	-4	4
1		1	0	-4
	1	0	-4	0

A partir de aquí descomponemos el polinomio en $(x-1)(x^2-4)$. Para el polinomio de segundo grado utilizamos la fórmula de Bhaskara, de la cual deducimos que las raíces restantes son 2 y -2.

Otra manera equivalente de plantear el problema es escribir el polinomio factorizado con parametros.

Sabiendo que 1 es raiz se tiene que $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)Q(x)$ donde $Q(x)$ es un polinomio de grado 2. Es decir $Q(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b, c son constantes de que debemos determinar.

Para que el polinomio $(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ esa igual a P se debe cumplir que a, b y c son soluciones del sistema

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b-a &= -1 \\ c-b &= -4 \\ c &= 1 \end{cases}$$

Resoluviendo el sistema obtenemos que $a = 1, b = 0, c = -4$. Es decir $P(x) = (x-1)(x^2-4)$. Por tanto las raíces son $1, 2, -2$

Cálculo de raices a partir de un cambio de variable

Calcular las raíces de $P(x) = x^4 - x^2 - 2$
Solución:
Los polinomios de esta forma (grado 4 con coeficientes en la primer y tercer potencia nulos) pueden transformarse y resolverse como si fuesen de segundo grado. Consideramos el cambio de variable $u := x^2$. El polinomio queda $P(x) = Q(u) = u^2 - u - 2$, cuyas raices (en función de u), aplicando la fórmula de Bhaskara son:

$$u_1 = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = 2$$
$$u_2 = \frac{1 - \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = -1$$

Luego, encontramos los x para los cuales u toma esos valores. Es decir, resolvemos las ecuaciones $x^2 = u_i$ para obtener las raices de $P(x)$. De $x^2 = 2$ obtenemos $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$. De $x^2 = -1$ no se obtienen nuevas raices reales. Si estamos trabajando en el cuerpo de los complejos, obtenemos $x_3 = i$, y $x_4 = -i$.
Notar que este procedemiento se puede emular si los exponentes tienen un divisor común, por ejemplo para el polinomio $x^{10} - x^5 - 2$.