Capítulo 5

Funciones continuas

Los ejercicios indicados con (*) son los sugeridos para trabajar en esta semana. Los demás ejercicios son complementarios (se puede elegir algún ejercicio para hacer de manera opcional).

5.1. Definición de continuidad

1. (*) Determinar en qué puntos son continuas las siguientes funciones:

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$ (la distancia al entero más cercano)

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$

   c) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor 1/x \rfloor$.

   d) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) =$ el primer número del desarrollo decimal de x.

   f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) =$ el número de sietes del desarrollo decimal de x si este número es finito y cero en el caso contrario.

2. (*) Determinar para qué $a, b \in \mathbb{R}$ la función f es continua

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ *b*) $f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & \text{si } x > 0 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ *d*) $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ a \sin(x + b) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

   e) $f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) & \text{si } x \leq \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x > \pi \end{cases}$ *f*) $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ a^2x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

3. (*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Probar que f no es continua en 0.

4. (*)

   a) Si f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, demostrar que f es continua en cero.

   b) Si g es una función continua en 0, $g(0) = 0$ y $|f(x)| \leq |g(x)|$, demostrar que f es continua en cero.

   c) Probar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   es continua en 0.

5. (*)

   a) Probar que una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple la propiedad de Lipschitz es continua.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable. Probar que la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ es continua.

6. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}, \text{ para } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) Bosquejar el gráfico de f y deducir que $0 < f(x) < x$, $\forall x \in (0,1]$.

   b) Probar que f es continua en $x = 0$.

7. Sean C_1 el círculo de ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y C_2 el círculo de centro $(0,0)$ y radio r. Notamos P el punto $(0,r)$ (punto superior de C_2) y Q el punto superior de la intersección entre C_1 y C_2. Finalmente definimos R el punto de intersección de la recta PQ y el eje x. Notar que el punto R es una función del radio de C_2, es decir r.

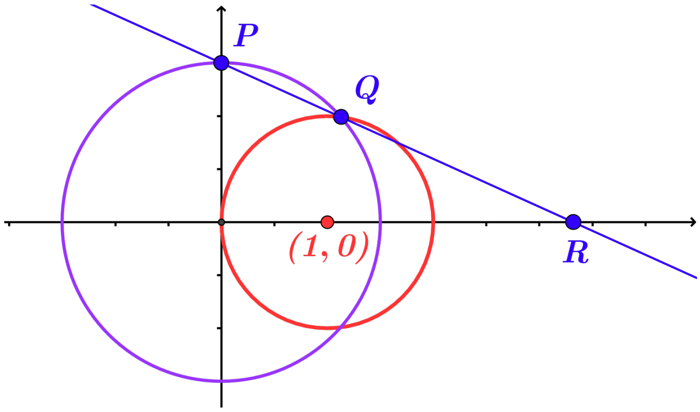


Figura 5.1: representación geométrica del problema

¿Qué ocurre con R cuando $r \to 0^+$?

8. **Funciones monótonas**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente. Definimos $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $g(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ y $h(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

   Probar que g es continua por derecha, es decir, $\lim_{x \to a^+} g(x) = g(a)$.

   Probar que h es continua por izquierda.

9. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Probar que la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$ es continua.

10. Sean a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$. Bosquejar, si es posible, una función continua que cumpla:

    a) $f : (a,b) \to [c,d]$, $f((a,b)) = (c,d)$ *b*) $f : (a,b) \to [c,d]$, $f((a,b)) = [c,d]$

    c) $f : [a,b] \to [c,d]$, $f([a,b]) = (c,d)$ *d*) $f : [a,b] \to [c,d]$, $f([a,b]) = [c,d]$

    e) $f : [a,b) \to [c,d]$, $f([a,b)) = (c,d]$ *f*) $f : (a,b) \to [c,d]$, $f((a,b)) = (c,d]$

    g) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f((a,b)) = \mathbb{R}$ *h*) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f([a,b]) = \mathbb{R}$

    i) $f : \mathbb{R} \to [c,d]$, $f(\mathbb{R}) = (c,d)$ *j*) $f : \mathbb{R} \to [c,d]$, $f(\mathbb{R}) = [c,d]$

    k) $f : [a,b] \to [c,d]$, $f([a,b]) = \left[c, c + \dfrac{d-c}{4}\right) \cup \left(d - \dfrac{d-c}{4}, d\right]$

    l) $f : \left[a, a + \dfrac{b-a}{4}\right) \cup \left(d - \dfrac{d-c}{4}\right) \to [c,d]$, $f\left(\left[a, a + \dfrac{b-a}{4}\right) \cup \left(d - \dfrac{d-c}{4}\right)\right) = [c,d]$

5.2. Teorema de Bolzano

1. **Existencia de soluciones**

   a) **(*)** Demuestre que la ecuación dada $x + 2\cos(x) = 0$ tiene al menos una solución.

   b) **(*)** En los siguientes casos, hallar un entero n para el cual existe x tal que $n \leq x \leq n+1$ y $f(x) = 0$:

   $$a)\quad x^5 + 5x^4 + 2x + 1 \qquad b)\quad x^5 + x + 1 \qquad c)\quad x + e^x \qquad d)\quad \cos(\frac{\pi x}{2}) + x$$

   c) Demostrar que existe un número x tal que:

   $$a)\quad \sin(x) = x - 1 \qquad b)\quad 5\sin(x) = \cos(x)^2$$

   $$c)\quad x^{117} + \frac{534}{1 + x^2 + \sin^2(x)} = 1212 \qquad d)\quad x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2(x)} = 119$$

   $$e)\quad \sqrt{x-5} = \frac{1}{x+3}$$

   d) Mostrar que para todo par $A, B \in \mathbb{R}^+$ la función $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ tiene una raíz.

   e) Probar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo (1,2):

   $$x\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - 5 = \log(x) - e^x$$

   f) Considere la ecuación $1 - \frac{x^2}{4} = \cos(x)$.

      1) Muestre que tiene al menos una solución.
      2) Muestre que tiene al menos dos soluciones.
      3) Muestre que tiene al menos tres soluciones.

2. Sea $g : [-3, 4] \to \mathbb{R}$ tal que: $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ -2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

   a) Prueba que g no se encuentra en las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-3, 4]$.

   b) Prueba de todas formas que g tiene una única raíz en dicho intervalo.

3. **(*)** Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Si $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$ demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existe un par $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f(a) < 0 < f(b)$. Sea A el conjunto definido por $A = \{y > a : f(z) < 0 : \forall z \in [a, y]\}$. Probar que A está acotado, no tiene máximo y $\sup(A)$ es una raíz de f.

5. **(*) Puntos fijos**

   Dada f una función, un punto fijo de f es un valor c tal que $f(c) = c$. Notar que una función puede tener varios puntos fijos, uno solo o ninguno.

   a) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Probar que f tiene al menos un punto fijo.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y monótona decreciente. Probar que f tiene exactamente un punto fijo.

   c) De un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y sin puntos fijos.

6. **Polinomios**

   a) Dado un polinomio P decimos que una raíz ha sido separada si se ha encontrado un intervalo $[a,b]$ que contiene esta raíz y ninguna otra. Separar las raíces reales de cada uno de los siguientes polinomios (todos tienen 4 raíces).

   Comentarios: Estudiar $P\left(\frac{n}{2}\right)$ para $n \in \mathbb{Z}$

   $$a) \quad 3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8 \qquad b) \quad x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2$$

   b) Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

   c) Mostrar que la paridad de la cantidad de raíces contadas con multiplicidad es igual a la paridad del grado del polinomio.

   d) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\phi(x)}{x^n}$$

   Probar que si n es impar, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n + \phi(x) = 0$.

7. **Integrales**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua e integrable (más adelante se verá que esta hipótesis es redundante).

   a) Dados $a < b$, probar que si f es no negativa y $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ entonces la función f es 0 en el intervalo $[a,b]$.

   b) (**Valor medio**)

      1. Demostrar que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c)(b-a) = \int_a^b f(t)\,dt$
      2. ¿El c de la parte anterior es único? Justificar su respuesta.
      3. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ no es continua ¿vale la conclusión de la primera parte? Justificar su respuesta

c) Si f continua es tal que $\int_{-2}^{1} f(t)\,dt = 3$, entonces se cumple necesariamente que:

(A) $f(\alpha) = 1$, $\forall \alpha \in [-2,1]$.
(B) $f(\alpha) < 2$, $\forall \alpha \in [-2,1]$.
(C) $\exists \alpha \in [-2,1]$ tal que $f(\alpha) = -3$.
(D) $\exists \alpha \in [-2,1]$ tal que $f(\alpha) = 1$.
(E) $f(\alpha) > \frac{1}{2}$, $\forall \alpha \in [-2,1]$.

d) Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Probar que si $\max(F) = F(c)$ para algún $c \in (a,b)$ entonces $f(c) = 0$

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $x \le f(x) \le x+1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $f(\mathbb{R})$.

9.

a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua y $f(x)$ es entero para todo x. ¿Qué puede decirse acerca de f?

b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua y $f(x)$ es racional para todo x. ¿Qué puede decirse acerca de f?

c) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas que cumplen $f(r) = g(r)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

10.

a) Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que $x^2 + (f(x))^2 = 1$. Demuestre que o bien $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ o bien $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$

b) ¿ Cuántas funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hay que satisfagan $(f(x))^2 = x^2$?

5.3. Teorema de Weierstrass

1. **(*)** Para las siguientes funciones determinar cuáles están acotadas inferior o superiormente y, en caso de estarlo, si tienen mínimo y máximo respectivamente.

$$a)\quad f : (-1,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \qquad b)\quad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$$

$$c)\quad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x} \qquad d)\quad f : (3,5) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$$

$$e)\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x) \qquad f)\quad f : (0,\pi) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$$

2. Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) > 0$, $x \in [0,2]$ y $\int_0^2 f(t)\,dt = 10$

a) Supongamos además que $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ una función integrable y acotada con máximo M y mínimo m. Probar que

$$10m \leq \int_0^2 f(t)g(t)\,dt \leq 10M.$$

b) Deducir que $10 \leq \int_0^2 (3t^2 + 1)e^t\,dt \leq 10e^2$.

c) Deducir que $10 \leq \int_0^2 (3t^2 + 1)e^{t^2}\,dt \leq 10e^4$.

3. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice *periódica* si existe $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ejemplos de estas funciones son $\sin$ y $\cos$.

   Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y periódica, entonces f tiene mínimo y máximo.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio. Probar que existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $|f(y)| \leq |f(x)|\ \forall x \in \mathbb{R}$.

5. **(*)** En este ejercicio se trabajará con el problema de la existencia de extremos de funciones continuas con dominio $\mathbb{R}$ (donde no podemos aplicar el teorema de Weierstrass).

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Probar o dar un contraejemplo de las siuguientes afirmaciones

   a) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo y mínimo.

   b) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo o mínimo.

   c) Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo y mínimo.

   d) Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo o mínimo.

   e) Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, entonces f tiene máximo.

   f) Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, entonces f tiene máximo.

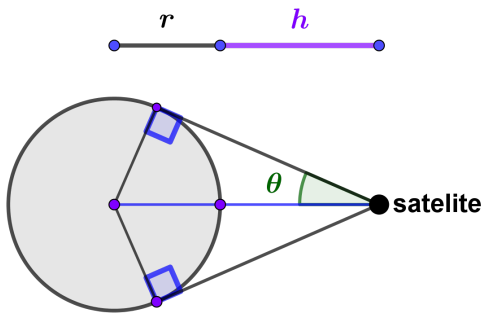
6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente y sobreyectiva. Probar que la función $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua.

5.4. Aplicaciones

1. Sea F la función que le asigna a cada punto del planeta tierra su temperatura, asumamos que la tierra tiene forma esférica perfecta, y que la función F es continua.

   Discutir si la siguiente afirmación es verdadera: Existen dos puntos antipodales (diametralmente opuestos en la esfera) que tienen la misma temperatura.

2. Cuando un satelite explora la Tierra, solo tiene acceso a una parte de la superficie. Alguno de ellos cuentan con sensores que que pueden medir un ángulo θ como se muestra en la figura.



donde r es el radio de la Tierra, h la distanica del satelite a la superfice terrestre y θ el ángulo entre el segmento que une el satelite y el centro de la Tierra con el segmento tangente a la tierra que pasa por el satelite.

El radio de la Tierra es de 6371 km aproximadamente.

   a) Calcular h para que $\theta = \frac{\pi}{3}$.

   b) Sea $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función que le asigna a cada h su θ correspondiente. Calcular $\lim_{h\to+\infty} F(h)$ y deducir $Im(F)$.

   c) Los satelites de navegación global, como el GPS, orbitan entre 20000 y 35786 km de áltura. Determinar los angulos mínimos y máximos para estos h y comparar con $\lim_{h\to+\infty} F(h)$.

3. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud periodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo t_0+12 horas. Demuestre que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

4. Suponga que tiene un resorte colgando desde el techo, y lo estira hacia abajo. ¿Es cierto que algún punto del resorte quedará en su posición original? Suponga que tiene un resorte sobre una superficie latreral (digamos una mesa) y lo contrae desde los extremos, aplicando fuerza similar, pero sin saber si es igual o no ¿Es cierto que algún punto del resorte quedará en su posición original?

5. **Distancia a una curva**

   a) Sean f un funcion continua en $[a, b]$, y sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que existe un punto en la gráfica de f que es el que está más cerca al punto $(x, 0)$, en otras palabras, existe un t de $[a,b]$ tal que la distancia de $(x,0)$ a $(t,f(t))$ es menor igual que la distancia $(z,f(z))$ para todo z de $[a,b]$. Recordar que la distancia entre dos puntos del plano $P=(p_1,p_2)$ y $Q=(q_q,q_2)$ es $d(P,Q)=\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$.

b) Muestre que este resultado no es cierto si $[a,b]$ se sustituye por (a,b).

c) Demuestre que el resultado es cierto si $[a,b]$ se sustituye por $\mathbb{R}$.

5.5. Complementarios

1. Dé ejemplos de polinomios de grado 2, digamos P y Q tales que $P(x)\neq Q(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

   Sean P, Q dos polinomios de grado impar, tales que $P(x)\neq Q(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. ¿Qué relación puede deducir de estos polinomios en cuanto a sus grados y coeficientes?

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

   Probar que existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=cx$.

3. **Funciones convexas**

   Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función convexa.

   a) Probar que f no tiene máximo.

   b) Probar que f es continua.

   c) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ convexa.

      1) Probar que f es continua en (a,b).

      2) Dé un ejemplo de una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ convexa tal que no es continua en a y no es continua en b.

4. Demuestre que no existe una función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que la preimagen de cada punto tenga 2 valores, es decir $\#f^{-1}(y)=2$ para todo $y\in\mathbb{R}$.

5. **Topología I**

   Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y $A\subset\mathbb{R}$ un conjunto *abierto*.[1]

   Probar que $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto.

6. **Topología II**

   Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua.

   a) Probar que $f([a,b])$ es un intervalo cerrado. De un ejempo de función continua tal que $f((0,2))$ sea un intervalo cerrado.

[1]Decimos que A es *abierto* si $\forall a\in A$ existe $\varepsilon>0$ tal que $E(a,\varepsilon)\subset A$.

b) Probar que dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se tiene que $J = f(I)$ también es un intervalo.

c) Probar que la función

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Verfica el punto anterior pero no es continua.

7. **Topologia III**

La idea de este ejercicio es ver de forma intuitiva cómo funciones continuas pueden tener inversas no continuas, cuando consideramos espacios distintos de intervalos.

a) Sea $f : [0,2) \cup (4,10] \to [0,10]$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Probar que f es biyectiva y continua.
Calcular f^{-1}. Probar que f^{-1} no es continua.

b) Se considera la función $f : [0,4) \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} (t,0) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ (1,t-1) & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ (3-t,1) & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ (0,4-t) & \text{si } 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

Observar que f es inyectiva y que la imagen de f es el cuadrado de vértices opuestos $(0,0)$ y $(1,1)$.
Dado $t_0 \in [0,4)$ calcular la función $g(t) = d(f(t), f(t_0))$ (la distancia de $f(t)$ a $f(t_0)$)
Probar que la función g es continua. Esto muestra, de forma intuitiva que la función f es continua ($f(x)$ está cerca de $f(x_0)$ si x está cerca de x_0).
Mostrar que para todo $\delta > 0$ existen $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(f)$ tal que $d(y_0, y_1) < \delta$ pero $d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) > 3$. Esto muestra de forma intuitiva que f^{-1} no es continua.