Capítulo 3

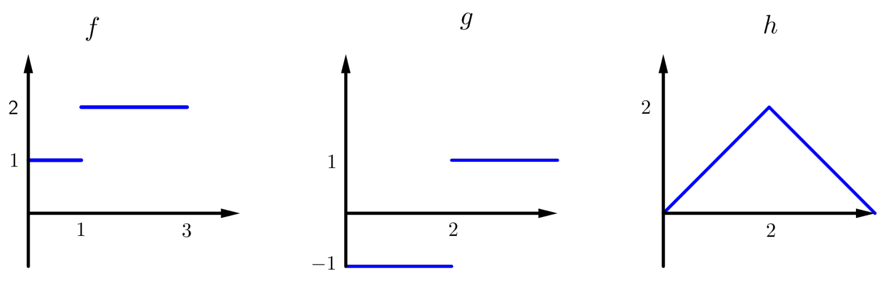
Integración

Los ejercicios indicados con (*) son los sugeridos para trabajar en estas dos semanas. Los demás ejercicios son complementarios (se puede elegir algún ejercicio para hacer de manera opcional).

3.1. Introducción a la definición de integral

En esta sección se trabajará con la idea intuitiva de integral, donde la integral de una función f en el intervalo $[a,b]$ es el área signada entre el gráfico de f y el eje x.

Algunos ejemplos de integrales:



- $\int_0^3 f(t)dt = 1\times 1 + 2\times 2 = 5$
- $\int_0^2 g(t)dt = -1\times 2 = -2, \quad \int_0^4 g(t)dt = 0$
- $\int_0^4 h(t)dt = \frac{4\times 2}{2} = 4$

Todos los resultados de las secciones **3.1** *y* **3.2** *se podrán probar formalmente luego, aquí están para dar ideas intuitivas del problema y trabajar con acotaciones.*

Propiedades básicas de áreas Asumimos las siguientes propiedades básicas:

- Si $A \subset B$, entonces Área$(A) \leq$ Área(B)
- El área de un rectángulo R de lados a y b es Área$(R) = ab$. El área de un triángulo rectángulo T de base b y altura h es Área$(T) = \frac{hb}{2}$ (esto se puede deducir).
- Si $A \cap B = \emptyset$, entonces Área$(A \cup B)$ = Área(A)+Área(B). Además, si dos rectangulos R_1 y R_2 se intersecan solo en alguno de sus lados, entonces Área$(R_1 \cup R_2)$ = Área(R_1) + Área(R_2) (esto último se puede deducir).

Se puede asumir que todas las funciones de las secciones 1 y 2 de este capítulo son integrables.

1. **(*)** Calcular la integral de las siguientes funciones en el intervalo $[1,3]$. Aclaración: El valor $[x]$ es la distancia de x al entero más próximo.

   $a)$ $(*)\ f(x) = 2 - x$ $b)$ $f(x) = x$ $c)$ $f(x) = 2x$

   $d)$ $(*)\ f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x-2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$ $e)$ $f(x) = |x-2|$

   $f)$ $(*)\ f(x) = 3\lfloor x \rfloor$ $g)$ $f(x) = \lfloor x \rfloor^2$ $h)$ $\dfrac{3}{\lfloor x \rfloor}$

   $i)$ $(*)\ f(x) = 3[x]$ $j)$ $f(x) = x + [x]$ $k)$ $f(x) = x - [x]$

2. Incluyendo las figuras una dentro de otra ordenar de forma creciente en área los siguientes conjuntos:

   $a)$ un cuadrado de lado 2 $b)$ un rectángulo cuyo lado menor mide 2

   $c)$ un rombo de diagonales que miden 2 y 1

   $d)$ un círculo de radio $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $e)$ una elipse de eje mayor 2 y eje menor 1

3. Sean f, g dos funciones afines y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

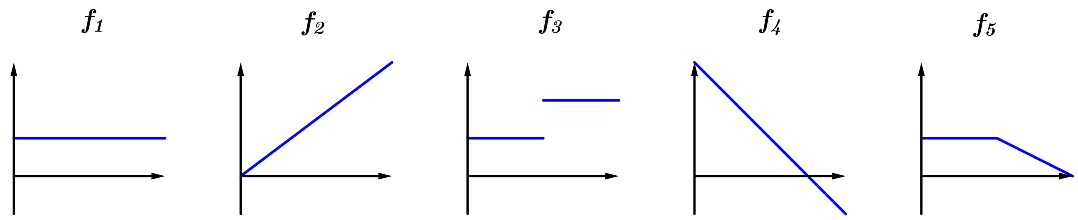
   Probar que si $f(a) - g(a) = -(f(b) - g(b))$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Sugerencia: Verifique que se cumple en un ejemplo concreto y luego trate de generalizar.

4. $a)$ ¿Qué valores de a y b, $a < b$, maximizan el valor de la integral $\int_a^b x - x^2 dx$?

   $b)$ ¿Qué valores de a y b, $a < b$, minimizan el valor de la integral $\int_a^b -2x^2 + x^4 dx$?

   Sugerencia: No trate de calcular las integrales.

5. (*) Bosquejar las funciones $F_i(x) = \int_0^x f_i(t)dt$, para las siguientes funciones:



6. (*) Calcule explícitamente y grafique la función $F(x) = \int_0^x f_i(t)\,dt$ para las siguientes funciones:

$a)\quad f_1(t) = \text{máx}(\{t, 2-t\}) \qquad b)\quad f_2(t) = [t] \qquad c)\quad f_3(t) = t - [t]$

7. (*) Calcule el área de la región S comprendida entre las graficas de f y g, en el intervalo indicado para cada caso. Bosquejar en cada caso las dos graficas y sombrear S.

$a)\quad (*)\ f(x) = x,\ g(x) = -x$ en $[-2, 2]$ $\qquad b)\quad f(x) = x,\ g(x) = 1 - 2x$ en $[-1, 2]$

$c)\quad (*)\ f(x) = |x|,\ g(x) = |x-1|$ en $[-1, 1]$ $\qquad d)\quad f(x) = |x-1|,\ g(x) = x$ en $[0, 2]$

$e)\quad (*)\ f(x) = [2x],\ g(x) = 2[x]$ en $[0, 2]$ $\qquad f)\quad f(x) = [x] - 2x,\ g(x) = [2x]$ en $[0, 2]$

8. Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int_0^4 \sin(\pi\lfloor x\rfloor)\,dx \qquad b)\ \int_0^6 \sin\left(\frac{\pi\lfloor x\rfloor}{6}\right)dx \qquad c)\ \int_0^4 2^{\lfloor x\rfloor}\,dx$$

$$d)\ \int_2^3 \left\lfloor x^2\right\rfloor dx \qquad e)\ \int_1^2 \left\lfloor x^2 + x\right\rfloor dx \qquad f)\ \int_0^2 \left\lfloor x^2 - x\right\rfloor dx$$

$$g)\ \int_1^9 \left\lfloor \sqrt{x}\right\rfloor dx \qquad h)\ \int_1^{16} \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{2}\right\rfloor dx$$

$$i)\ \int_1^{100} \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor dx \qquad j)\ \int_1^3 \frac{2}{\lfloor 2x\rfloor^2}\,dx \qquad k)\ \int_1^2 \frac{2}{\lfloor x^2\rfloor}\,dx$$

3.2. Primeras acotaciones

1. Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx \le \frac{1}{2}$$

2. **(*)** Sea $f : [-1,4] \to \mathbb{R}$ integrable tal que $f(x) \geq 2$, para todo $x \in [-1,0] \cup [2,4]$ y $f(x) \geq 4$, para todo $x \in [0,2]$.

   a) Probar que $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx \geq 14$.

   b) Si además se sabe que $f(x) \geq 3$ para todo $x \in [1,3]$, probar que $\int_{-1}^{4} f(x)dx \geq 15$.

3. **(*)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente e integrable.

   Probar que:

$$a) \quad \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \int_0^n f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$b) \quad \sum_{k=0}^{mn-1} \frac{f\left(\frac{k}{m}\right)}{m} \leq \int_0^n f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{mn} \frac{f\left(\frac{k}{m}\right)}{m}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}^+$$

4. **Funciones convexas**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa.

   a) Probar que

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b (t-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) + f(a)\,dt$$

   b) Probar que si f es creciente entonces

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) - f(a)\,dt \leq \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt$$

5. **(*)** A partir de las gráficas, aproximar por arriba y por abajo el valor de $\displaystyle\int_{-3}^{3} f_i(d)\mathrm{d}x$ para las siguientes funciones:

$$a) \quad f_1(x) = \frac{4}{1+x^2} \qquad b) \quad f_2(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad c) \quad f_3(x) = 2^{x-1}$$

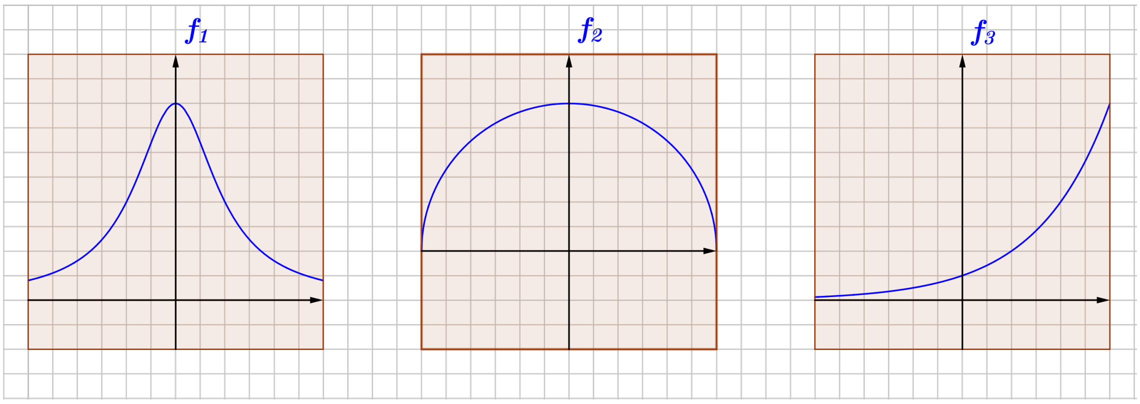


Figura 3.1: gráficas de las funciones f_i. Los ejes tienen la misma escala.

3.3. Particiones, sumas superiores e inferiores y acotaciones

1. (*) Calcular $S^*(f,P)$ y $S_*(f,P)$ en los siguiente casos

   a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=3x-2$

   a) $P=\{-2,0,1,2\}$ *b*) $P=\left\{-2,-1,\frac{1}{2},2\right\}$ *c*) $P=\left\{-2,\frac{-1}{2},\frac{1}{2},2\right\}$

   d) $P=\left\{-2,\frac{3}{4},1,2\right\}$ *e*) $P=\left\{-2,\frac{-1}{2},0,\frac{3}{4},2\right\}$

   b) (*) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$

   a) $P=\{-2,0,1,2\}$ *b*) $P=\left\{-2,-1,\frac{1}{2},2\right\}$ *c*) $P=\left\{-2,\frac{-1}{2},\frac{1}{2},2\right\}$

   d) $P=\left\{-2,1,\frac{3}{2},2\right\}$ *e*) $P=\left\{-2,\frac{-1}{2},0,\frac{3}{2},2\right\}$

2. (*) Calcule $S^*(f,P)$ y $S_*(f,P)$ en los siguientes casos

   a) $(*)\ f(x)=2^x,\ P=\{0,1,2,3\}$ *b*) $f(x)=\sqrt{x},\ P=\{0,1,4,9\}$

   c) $(*)\ f(x)=\sin(x),\ P=\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\pi\right\}$ *d*) $f(x)=\cos(x),\ P=\left\{0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right\}$

   e) $(*)\ f(x)=\tan(x),\ P=\left\{0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right\}$ *f*) $f(x)=\arctan(x),\ P=\left\{0,\frac{1}{\sqrt{3}},1,\sqrt{3},\right\}$

3. Para las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ calcular $S_*(f,P)$ y $S^*(f,P)$ donde $P = \{-1;0;1;1{,}5;3\}$.

$$a)\quad f(x) = \lfloor x \rfloor \qquad b)\quad f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \qquad c)\quad f(x) = \lfloor 2x \rfloor$$

$$d)\quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x+2 & x \geq 0 \end{cases} \qquad e)\quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$$

4. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   Probar que f es integrable en el intervalo $[-1,1]$

   b) Bosquejar la función $f(x)$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   Calcular $\int_a^b f(x)\,dx$

   c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable. Dado $M \in \mathbb{R}$ definimos $g_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $g_M(0) = M$ y $g_M(x) = f(x)$ para todo $x \neq 0$.
   Probar que g_M es integrable.

5. (*) **Integrales polinómicas**

   a) Calcular $\int_1^3 x\,dx$ hallando sus sumas superiores e inferiores para particiones equiespaciadas.
   Recordar que $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

   b) Calcular $\int_0^3 x^2\,dx$ hallando sus sumas superiores e inferiores para particiones equiespaciadas.
   Recordar que $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

6. Calcular $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para los siguientes casos

$$a)\quad F(x) = \int_{-1}^{\sin(x)} 1\,dt \qquad b)\quad F(x) = \int_{-1}^{\cos(x)} 1\,dt \qquad c)\quad F(x) = \int_{-2}^{\arctan(x)} 1\,dt$$

$$d)\quad F(x) = \int_{x}^{2x+1} t\,dt \qquad e)\quad F(x) = \int_{x}^{x^2+1} t\,dt \qquad f)\quad F(x) = \int_{x}^{|2x|} t\,dt$$

7. (*)

   a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Dada una partición P del intervalo $[0,1]$, calcular $S_*(f,P)$ y $S^*(f,P)$. Determinar si f es integrable en el intervalo $[0,1]$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sea P una partición del intervalo $[0,1]$, calcular $S_*(f,P)$.
Probar que $S^*(f,P) \geq \frac{1}{4}$. *Sugerencia:* considerar los intervalos de la forma $[a_k, a_{k+1}]$ con $a_{k+1} \geq \frac{1}{2}$.
Concluir que f no es integrable en el intervalo $[0,1]$.

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que f es integrable en el intervalo $[0,1]$.

8. a) Dar un ejemplo de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ no constante e integrable, para la cual exista una partición P de $[a,b]$ que verifique $\int_a^b f(t)\,dt = S^*(f,P)$

   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Probar que si existe P una partición de $[a,b]$ tal que $S_*(f,P) = S^*(f,P)$ entonces f es constante.

3.4. Integrabilidad de funciones

1. **(*)** De las siguientes variaciones de la definición de integrabilidad, determine las implicancias entre ellas y si hay variaciones equivalentes.

   La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable en el intervalo $[a,b]$ si

   a) (Definición de integrable) Para todo $\epsilon > 0$, existe una partición P de $[a,b]$ tal que $S^*(f,P) - S_*(f,P) \leq \epsilon$

   b) Para todo $\epsilon > 0$, se cumple que toda partición P de $[a,b]$ verifica que $S^*(f,P) - S_*(f,P) \leq \epsilon$

   c) Existe $\epsilon > 0$, tal que existe una partición P de $[a,b]$ se verifica que $S^*(f,P) - S_*(f,P) \leq \epsilon$

   d) Existe $\epsilon > 0$, tal que para toda partición P de $[a,b]$ se verifica que $S^*(f,P) - S_*(f,P) \leq \epsilon$.

   Para las siguientes funciones, determinar cuál de las variaciones de integrabiliad se verifica:

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = 0, \qquad f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. **(*)** Probar que una función monótona creciente y acotada es integrable.

   Sugerencia: Para probar que es integrable en el intervalo $[a,b]$, tomar una partición equiespaciada de tamaño $\frac{b-a}{n}$.

3. *a*) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable y $\alpha\in\mathbb{R}$. Probar que la función $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\alpha f(x)$ es integrable.

   b) Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones integrables. Probar que la función $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ es integrable.

   c) Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones integrables. Probar que la función $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=f(x)+g(x)$ es integrable.

4. **Funciones de Lipschitz**

   Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice de *Lipschitz* o *lipschitzianas* si existe $K>0$ tal que para todo par de puntos $x,y\in\mathbb{R}$ se verifica que $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|$.

   a) Probar que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable, entonces la función $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es lipschitziana.

   b) Pruebe que una función lipschitziana es integrable.

   c) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lipchitziana, no negativa, y $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$. Probar que si $\int_a^b f(t)\,dt=0$ entonces $f(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$. Dar un ejemplo de función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ no negativa, no nula, tal que $\int_0^1 g(t)\,dt=0$.

5. **(*)** Sea f una función estrictamente creciente en $[a,b]$, y tal que su imagen es $[f(a),f(b)]$.

   a) Observar que
   $$\int_a^b f(t)\,dt+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt-bf(b)+af(a)=0$$

   b) Calcular $\int_1^2 \sqrt{t}\,dt$, asumiendo que se conoce el valor de $\int_a^b t^2\,dt$.

6. Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones integrables, no negativas. Sean P una partición de $[a,b]$, M_i',m_i' los supremos e ínfimos en el intervalo $[x_i,x_{i+1}]$ para f. De forma análoga notamos M_i'',m_i'' para g y $M_i.m_i$ para fg.

   a) Demuestre que $M_i\le M_i'M_i''$ y $m_i\ge m_i'm_i''$.

   b) Deduzca que
   $$S^*(fg,P)-S_*(fg,P)\le\sum_{i=0}^{n-1}[M_i'M_i''-m_i'm_i''](t_{i+1}-t_i)$$

c) Aplicando el hecho de que f,g están acotadas, notemos M a una cota superior para ambas, demuestre que

$$S^*(fg,P) - S_*(fg,P) \leq M\left(\sum_{i=0}^{n-1}[M_i' - m_i'](t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1}[M_i'' - m_i''](t_{i+1} - t_i)\right)$$

d) Demuestre que fg es integrable.

e) Estudie para el caso de f,g funciones integrables cualesquiera (es decir, no necesariamente no negativas).

3.5. Cambio de variable lineal

1. **(*)** Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable y $a,b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Probar que:

   a) **(*)** Para todo $p \in \mathbb{R}$ se cumple que

   $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+p}^{b+p} f(t-p)\,dt$$

   b) **(*)** Para todo $r \in \mathbb{R}^+$ se cumple que

   $$r\int_a^b f(t)\,dt = \int_{ar}^{br} f\left(\frac{t}{r}\right)dt$$

   c) Deducir que para todo $p \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}^+$ se cumple que

   $$r\int_a^b f(t)\,dt = \int_{ra+p}^{rb+p} f\left(\frac{t-p}{r}\right)dt \text{ y } r\int_a^b f(t)\,dt = \int_{r(a+p)}^{r(b+p)} f\left(\frac{t}{r} - p\right)dt$$

   d) Probar que

   $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(b+a-t)$$

2. Calcular la integral $\int_0^b x^n\,dx$ en función de b y $\int_0^1 x^n\,dx$.

   Deducir la fórmula general para $\int_a^b x^n\,dx$ en función de a,b y $\int_0^1 x^n\,dx$.

3. **(*) Definición y propiedades de la función logaritmo**

   Definimos la función logaritmo como

   $$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

a) Probar que la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es creciente. Concluir que su única raíz es 1.

b) Probar la desigualdad $\log(n(a-1)+1) \leq n\log(a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\forall a \geq 1$.

c) Probar que $\log(a) = \int_x^{ax} \frac{1}{t}\,dt, \quad \forall a, x \in \mathbb{R}^+$.
Probar que

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

d) A partir de la igualdad anterior, probar que:

1) $\log\left(x^2\right) = 2\log(x)$.
2) $\log(x) = 2\log\left(\sqrt{x}\right)$.
3) $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$.
4) Más en general, probar que:

$$\log(x^n) = n\log(x) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

5) Completar la prueba para el caso racional, es decir:

$$\log\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m}\log(x) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

e) A partir de la igualdad $\log(x^n) = n\log(x)$, deducir que la función log no está acotada.

4. **Círculos y elípses**

a) A partir de un cambio de variable lineal, calcular el área de un círculo de radio r en función del área de un círculo de radio 1.

b) A partir de un cambio de variable lineal, calcular el área de la elípse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en función del área de un círculo de radio 1.

3.6. Cálculo de integrales

Al llegar a esta sección se asume que ya se conocen las siguientes integrales

$$\int_a^b 1\,dt = b - a, \qquad \int_a^b t\,dt = \frac{b^2 - a^2}{2}, \qquad \int_a^b t^2\,dt = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

$$\int_a^b \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\left(b^{3/2} - a^{3/2}\right) \text{ con } a, b > 0$$

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log(x) \text{ con } x > 0$$

Por lo que se puede usar como resultado.

1. (*)

   a) Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\int_{-1}^{1} h(t)\,dt = 0$ y $\int_{-1}^{3} h(t)\,dt = 6$. Calcular $\int_{1}^{3} h(t)\,dt$.

   b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\int_{2}^{8} f(t)\,dt = 20$ y $\int_{4}^{8} f(t)\,dt = -12$. Calcular $\int_{2}^{4} f(t)\,dt$.

2. Suponga que f y g son dos funciones integrables y que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4, \qquad \int_1^5 f(x)\,dx = 6, \qquad \int_1^5 g(x)\,dx = 8$$

   Calcular:

$$a)\ \int_2^2 g(x)\,dx \qquad b)\ \int_5^1 g(x)\,dx \qquad c)\ \int_1^2 3f(x)\,dx$$

$$d)\ \int_2^5 f(x)\,dx \qquad e)\ \int_1^5 (f(x)-g(x))\,dx \qquad f)\ \int_1^5 (4f(x)-g(x))\,dx$$

3. (*) Sea $f:[2,8]\to\mathbb{R}$ integrable tal que $\int_2^8 f(x)\,dx = 20$ y $\int_8^4 f(x)\,dx = 12$.

   a) Calcular $\int_2^4 f(x)\,dx$

   b) Probar que existen $c,d\in[2,4]$ tales que $f(c)\geq 15$ y $f(d)\leq 17$.

4. (*) Calcular las siguientes integrales de polinomios:

$$a)\ (*)\ \int_1^4 3x-2\,dx \qquad b)\ \int_3^5 2t-1\,dt \qquad c)\ \int_8^{10} -2s-5\,ds$$

$$d)\ (*)\ \int_0^2 2x^2+x-3 \qquad e)\ \int_{-1}^3 3t^2-t+1\,dt \qquad f)\ \int_{-1}^2 3s^2-2s+1\,ds$$

$$g)\ (*)\ \int_0^2 (u+3)(u+1)\,du \qquad h)\ \int_{-1}^4 (t+1)(t-2)\,dt \qquad i)\ \int_{-1}^1 (s+1)(s+2)\,ds$$

5. (*) Calcular las siguientes integrales

$$a)\ (*)\ \int_{-3}^3 u^{101}\,du \qquad b)\ \int_{-4}^4 \frac{r^{71}}{4}\,dr \qquad c)\ \int_{-100}^{100} \frac{20t^{51}}{31}\,dt$$

$$d)\ (*)\ \int_0^{2\pi} \sin(kt)+5\,dt,\ k\in\mathbb{N} \qquad e)\ \int_0^{2\pi} \cos(kt)+5\,dt,\ k\in\mathbb{N}$$

$$f)\ (*)\ \int_{-1}^1 \tan(x)\,dx \qquad g)\ \int_{-1}^1 \arctan(x)dx$$

6. Calcular las integrales

$$a)\ \int_1^5 \frac{1}{x+1}\,dx \qquad b)\ \int_2^3 \frac{1}{2x+3}\,dx \qquad c)\ \int_1^4 \frac{1}{3x-2}\,dx$$

$$d)\ \int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx \qquad e)\ \int_{-1}^1 \frac{2x-1}{x+2}\,dx \qquad f)\ \int_0^2 \frac{3x-2}{2x-10}\,dx$$

$$g)\ \int_1^4 \frac{\sqrt{2}x+1}{\pi x+5}dx \qquad h)\ \int_1^4 \frac{ex+1}{\log(2)x+5}dx \qquad i)\ \int_1^3 \frac{\pi x+2}{e+x}dx$$

7.

   a) A partir de la igualdad $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$, calcular $\int_2^5 \frac{1}{1-x^2}\,dx$.

   b) Probar que dados $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_1 < \mu_2$, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)} = \frac{\alpha}{x-\mu_1} + \frac{\beta}{x-\mu_2}$$

   Calcular

$$\int_{\mu_2+1}^{\mu_2+5} \frac{1}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}\,dx$$

   c) Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int_3^4 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx \qquad b)\ \int_4^7 \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx \qquad c)\ \int_{10}^{12} \frac{1}{x^2-4}\,dx$$

8. (*) Calcular las siguientes integrales:

$$a)\ (*)\ \int_3^4 \sqrt{3x}\,dx \qquad b)\ \int_3^4 \sqrt{2x}\,dx \qquad c)\ \int_0^2 \sqrt{5x}\,dx$$

$$d)\ (*)\ \int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx \qquad e)\ \int_5^7 \sqrt{x-3}\,dx \qquad f)\ \int_5^7 \sqrt{x-2}\,dx$$

$$g)\ \int_3^5 \sqrt{16-2x}\,dx \qquad h)\ \int_0^5 \sqrt{12-2x}\,dx \qquad i)\ \int_0^2 \sqrt{15-3x}\,dx$$

9. (*) Calcular las siguientes integrales

$$a)\ (*)\ \int_0^3 |2u-2|\,du \qquad b)\ \int_{-2}^1 |r+1|\,dr \qquad c)\ \int_3^{10} |-s+6|ds$$

$$d)\ (*)\ \int_{-2}^2 |x^2-1|\,dx \qquad e)\ \int_0^7 |s^2-4s+3|\,ds \qquad f)\ \int_{-3}^4 |t^2-4|dt$$

$$g)\ \int_1^5 \left|\frac{27}{x}-x^2\right|dx \qquad h)\ \int_0^6 \left|8\sqrt{x}-x^2\right|dx$$

10. Calcular las siguientes integrales

$$a)\quad \int_1^4 \left[\sqrt{x}\right] dx \qquad b)\quad \int_1^4 \left[\frac{x^2}{4}\right] dx \qquad c)\quad \int_1^2 \left[\frac{2}{t}\right] dt$$

11. (*) Calcular el área encerrada por los gráficos de f y g en los siguientes casos:

$$a)\quad (*)\, f(x) = x^2,\ g(x) = -2x+1 \qquad b)\quad f(x) = x^2 + x,\ g(x) = -x^2$$

$$c)\quad f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{|x|} \qquad d)\quad f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = 5 - x$$

3.7. Aplicaciones

1. En este ejercicio asumiremos que todas las funciones velocidades son integrables, así como las funciones de aceleración.

   a) Suponga que un auto se desplaza a una velocidad constante, digamos 50km/h, en una carretera recta. Digamos además que la posicián inicial era el kilometro 0, y a la media hora estaba en el kilometro 25.

      1) Calcular la posición del vehículo en un momento t_1 genérico.
      2) Deducir que se verifica la fórmula

      $$x(t) = \int_0^t 50\ ds$$

      3) Verificar que la igualdad de la parte anterior sigue siendo válida si la velocidad es constante a trozos.

   b) Suponga que 3 autos inician en el mismo lugar $0 = x_1(0) = x_2(0) = x_3(0)$ y tienen velocidades $0 \le v_1(t) \le v_2(t) \le v_3(t)$. Por tanto $x_1(t) \le x_2(t) \le x_3(t)$ para todo $t \ge 0$ Suponga además que v_1 y v_3 son constantes a trozos.

      1) Deducir que

      $$\int_0^t v_1(s)\ ds \le x_2(t) \le \int_0^t v_3(s) ds$$

      2) Probar que dada una partición P del intervalo $[0, t_1]$ se tiene que

      $$S_*(v_2, P) \le x_2(t_1) \le S^*(v_2, P).$$

      3) Concluir que

      $$x_2(t) = \int_0^t v_2(s) ds$$

4) Sea $x(t)$ la posición de una partícula y $v(t)$ su velocidad, con $v(t) \geq 0$.
Dado un tiempo arbitrario t_0 y una posición inicial arbitraria $x(t_0)$, deducir que para todo $t \geq t_0$ se tiene que

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(s)ds$$

c) Repetir las partes de este ejercicio para relacionar la velocidad $v(t)$ con la aceleración $a(t)$. Verificar que si el auto inicia desde el resposo (es decir $v(0) = 0$) entonces se cumple la siguiente igualdad

$$x(t) - x(0) = \int_{0}^{t} \left(\int_{0}^{s} a(u)\, du \right) ds$$

d) Dada una particula que solo se mueve en una dirección, probar que la definición de *velocidad media* coincide con la de valor medio para la integral.

2. **Caída libre**

Si se suelta una pelota desde un edificio, digamos de $20m$ de altura, una primera aproximación dice que podemos suponer que la única fuerza que actua sobre ella es la gravedad (ignorando la resistencia del aire). Bajo esta hipótesis se obtiene que la aceleración hacia la Tierra es de $9{,}8m/s^2$.

¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo? ¿A qué velocidad llega?

3. *a*) Dos autos avanzan en una misma ruta y en una misma dirección. En la figura **a** se muestra la velocidad respectiva como función del tiempo.

    1) ¿Qué auto alcanzó la mayor velocidad?
    2) ¿Qué auto se detuvo primero?
    3) ¿Qué auto realizó el mayor recorrido?

   b) Dos autos avanzan en una misma ruta y en una misma dirección. En la figura **b** se muestra la velocidad respectiva como función del tiempo. Sabiendo que el auto rojo inició su recorrido 2 horas despues que el azul y que su velocidad máxima fue de $50\frac{km}{h}$, determinar:

    1) cuánto recorrió cada auto,
    2) la velocidad máxima del auto azul,
    3) el momento en el que estuvieron mas lejos entre sí.

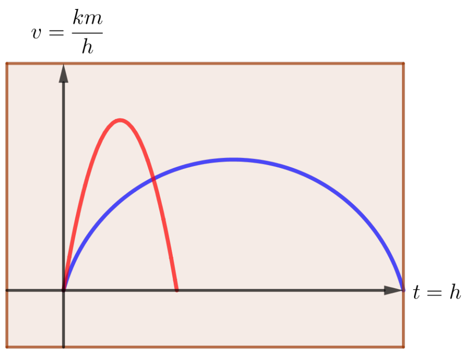


figura a

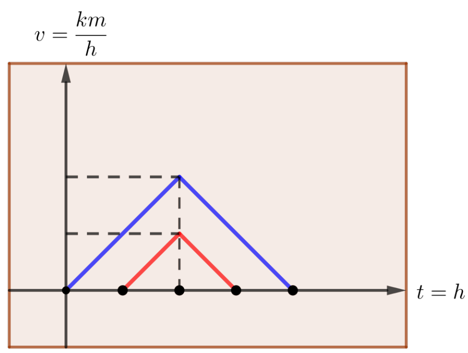
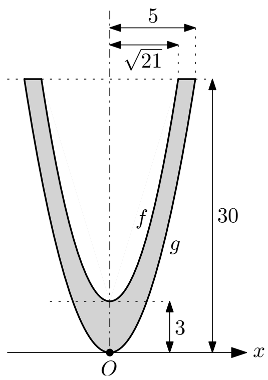


figura b

4. **Áreas y volumenes** (Examen julio 2017)

   El monumento a Luis Batlle Berres es una “U“ hecha de hormigón con un revestimiento hecho de granulado de granito. Dicha “U“ se define mediante dos parábolas, que son los gráficos de dos funciones a las que llamaremos $f(x)$ y $g(x)$. Las dimensiones aproximadas del monumento, expresada en metros, vienen dadas por la siguiente figura:



   a) Determinar las expresiones de las funciones f y g

   b) Calcular el área (en m^2) de la cara frontal del monumento

   c) Asumiendo que el espesor del monumento es uniforme e igual a 2 metros y que su densidad es igual a $2300kg/m^3$, calcular el volumen del monumento (en m^3) y su masa (en kg).

5. **Trabajo, parte I**

   Suponga que una partícula p se mueve sobre una dirección fija. El trabajo W invertido sobre ésta, por un agente que ejerce una fuerza F constante y colineal con el desplazamiento, es $W = F\Delta r$.

   Bajo estas hipótesis:

   - La fuerza F podría ser negativa

- El trabajo solo depende de la fuerza y el modulo del desplazamiento y no cómo ocurrió este desplazamiento.
- Si la partícula p se mueve desde el punto a hasta el punto b, se tiene que $W = \int_a^b F(x)\,dx$.

Para trabajar con este problema debemos tener expresada la fuerza como función de la posición y no del tiempo. Por ejemplo, podríamos calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria de la Tierra a un objeto que cae. Otro ejemplo, es la fuerza ejercida por un resorte.

Notemos como $W_a^b(F)$ al trabajo invertido por la fuerza F.

Propiedades esperables de esta cantidad

(I) Propiedad aditiva: Si $a < b < c$ entonces $W_a^c(F) = W_a^b + W_b^c$

(II) Propiedad monótona: Si $F_1 \leq F_2$ en $[a,b]$ entonces $W_a^b(F_1) \leq W_a^b(F_2)$

(III) Fórmula elemental: Si F es constante, por ejemplo $F(x) = c$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $W_a^b(F) = c(b-a)$

a) Probar que si F es constante a trozos, entonces $W_a^b(F) = \int_a^b F(x)\,dx$.

b) Suponga que el trabajo se ha definido para una famila de funciones F de modo que satisface (I), (II) y (III). Probar que si F es una función integrable se cumple que $W_a^b(F) = \int_a^b F(x)\,dx$.

c) Un balón se suelta desde 20 metros de altura. Calcular el trabajo de la fuerza de gravedad cuando el balón toca el suelo.

d) Una partícula se desplaza sobre una dirección desde $x = 0m$ hasta $x = 4m$. Esta partícula se encuentra sometida a una única fuerza F dada por

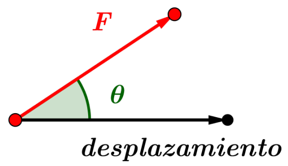
$$F(x) = \begin{cases} 1{,}5x & \text{si } x \leq 2 \\ 6 - (1{,}5)(2-x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calcular el trabajo realizado por F.

6. **Trabajo, parte II**

La definición de trabajo se puede adaptar cuando la fuerza no es colineal al movimiento.

El trabajo W invertido sobre un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante sobre el sistema es el producto de la magnitud F de la fuerza, la magnitud Δr de desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y $\cos(\theta)$, donde θ es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento es $W = F\Delta r\cos(\theta)$



En el caso de que de que la fuerza sea variable en dirección y sentido pero la dirección del desplazamiento no, digamos que va desde a hasta b en el eje x, entonces el trabajo es $W = \int_a^b F(x)\cos(\theta(x))dx$.

a) Conjeturar sobre el por qué de esta definición, apartir de la definición para fuerza constante.

b) (Práctico 6, Física 1) Para empujar una caja de $25Kg$ hacia arriba sobre un plano inclinado a $27°$, un obrero ejerce una fuerza de $120N$, paralelea al plano. Cuando la caja se ha deslizado $3,6m$, ¿Cuanto trabajo se efectuó sobre la caja por

1) el obrero
2) la fuerza de gravedad, y
3) la fuerza normal al plano inclinado?

7. **Convolución** La operación de *convolución* es una herramienta útil en muchas áreas tanto de matemática como de ingeniería. Por ejemplo, se usa en procesamiento de imágenes, procesamiento de datos, acústica, ingeniería eléctrica, física (en particular en sistemas lineales).

Veremos algunos ejemplos de este operador, para las condiciones en las que estamos trabajando.

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables y tales que existen a_1, b_1, a_2, b_2 con $f(x) = 0,\ \forall x \notin [a_1, b_1]$ y $g(x) = 0,\ \forall x \notin [a_2, b_2]$, se define la *convolución* $f * g$ como

$$(f * g)(t) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)g(t-x)dx$$

a) Calcular $(f * g)$ para los siguientes casos:

1)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

2)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,2] \end{cases}$$

3)
$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1] \\ 0 & \text{si } x\notin[0,1]\end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,2] \\ 0 & \text{si } x\notin[0,2]\end{cases}$$

b) Probar que la convolución es una operación conmutativa ($f*g=g*f$).

3.8. Complementarios

1. Realice una lista con los tipos de funciones que sabe integrar, a partir de lo visto en el curso. Compare con sus compañeros.
2. *a*) Sabiendo que $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ es una función integrable, demostrar que:
   1) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x),\,dx$.
   2) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

   b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función periodica de periodo k
   1) Probar que $\int_a^b f(t)\,dt=\int_{a+nk}^{b+nk} f(t)\,dt$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.
   2) Probar que $\int_a^{nk+a} f(t)\,dt = n\int_a^{a+k} f(t)\,dt$ para todo $n\in\mathbb{N}$.
3. Probar que $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ para todo par $n,m\in\mathbb{N}$. Calcular en función del valor $\int_0^1 x^k\,dx$ la integral $\int_0^1 x^2(1-x)^{30}\,dx$.
4. Construir un ejemplo donde **no** se verifique la igualdad
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$$
5. **Monotonía y extremos**

   a) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función integrable y no negativa.
   Probar que la función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ es monótona creciente.

   b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que signo$(f(x))=$ signo(x).
   Definimos $F_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como $F_a(x)=\int_a^x f(t)dt$. Probar que F_a tiene mínimo y se realiza en 0 (es decir $F_a(0)\le F_a(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$).

   c) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que signo$(f(x))=-$signo(x).
   Definimos $F_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como $F_a(x)=\int_a^x f(t)dt$. Probar que F_a tiene máximo y se realiza en 0 (es decir $F_a(0)\ge F_a(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$).
6. Determinar el signo de las siguientes integrales
$$a)\quad \int_0^2 \sin\left(x^2\pi\right)dx \qquad b)\quad \int_{-1}^1 \cos\left(x^2\pi\right)dx$$

7. Sean f, g funciones integrables. Hallar $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)dy \right) dx$ en función de $\int_a^b f(t)dt$, y $\int_c^d g(t)dt$.

8. **Inversa de la función logaritmo**

   En este ejercicio se mostrará que existe un $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $f_a(x) = a^x$ es la inversa de $\log(x)$. Notemos así en este ejercicio $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a la función $f_a(x) = a^x$ definida en el Ejercicio 2.4-6

   a) Mostrar que si $\log(a) = 1$ se tiene que $\log\left(a^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Es decir, la función $f_a|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ verifica $\log \circ f_a|_{\mathbb{Q}} = id$.

   b) Mostrar que la función $\log \circ f_a$ es estrictamente creciente.

   c) Sean A_x y B_x los conjuntos definidos por

   $$A_x = \left\{ \log\left(a^{\frac{n}{m}}\right) : n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \text{ y } \frac{n}{m} < x \right\} \text{ y}$$

   $$B_x = \left\{ \log\left(a^{\frac{n}{m}}\right) : n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \text{ y } \frac{n}{m} > x \right\}$$

   Probar que $\alpha < \log(x)$ para todo $\alpha \in A_x$, y $\beta > \log(x)$ para todo $\beta \in B_x$.
   Concluir que $\sup(A_x) \leq \log(a^x) \leq \text{ínf}(B_x)$ y por tanto $\log(a^x) = x\log(a)$. En particular si $\log(a) = 1$, tenemos que $\log \circ f_a = \text{Id}$.

   d) Probar que $\log(4) > 1$. Deducir que el conjunto $\{y : y \in \mathbb{R}^+, \log(y) < 1\}$ está acotado superiormente.

   e) Probar que $a = \sup(\{y : y \in \mathbb{R}^+, \log(y) < 1\})$ verifica que $\log(a) = 1$. Concluir que $\log \circ f_a(x) = x$.

9. Calcular la integral de la siguiente función en $[0, 2]$.

   $$f(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{x}\right] & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

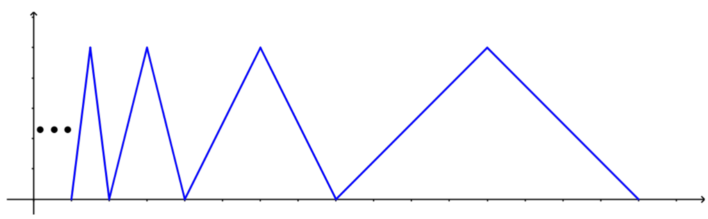


Figura 3.2: bosquejo de la función f

10. Consideremos la siguiente construcción inductiva:

    Se traza una recta (notemos r) por el origen que forma un ángulo $\frac{\pi}{6}$ con el eje x, y se marca el punto $a_1 = (1, 0)$ en el eje x. Luego se define b_1 como la proyección ortogonal de a_1 en la recta r.

    Definimos de forma inductiva a_{n+1} y b_{n+1} de la siguiente forma: a_{n+1} es la proyección ortogonal de b_n en el eje x y b_{n+1} es la proyección ortogonal de a_{n+1} en r.

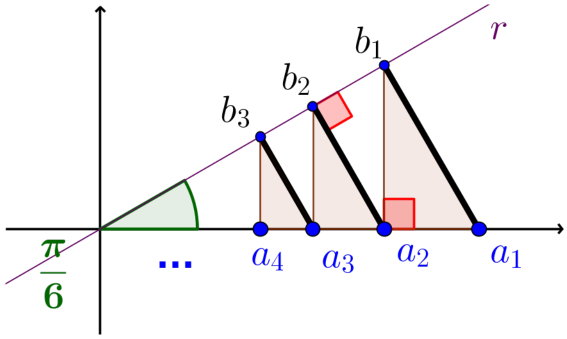


Figura 3.3: Bosquejo de los primeros iterados de la inducción

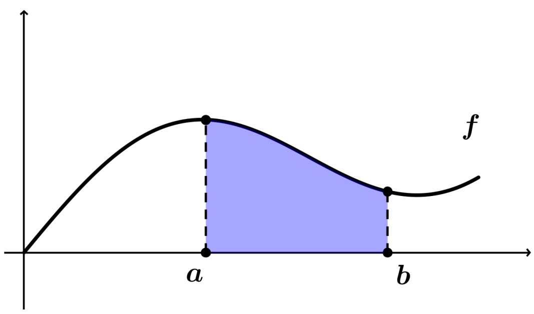
    a) Calcular las coordenadas de a_n.
    b) Describir la función f cuyo gráfico es la hipotenusa de cada triángulo a_{n+1}, b_n, a_n
    c) Calcular $\int_0^1 f(t)\,dt$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ con } \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \end{cases}$$

    Probar que f es integrable.

12. En la siguiente imagen se muestra el gráfico de una función f.



    Interpretar en cada caso que significa la integral de la función f entre los puntos a y b.

a) Eje x: tiempo en horas. Eje y: velocidad (kilometros por hora).

b) Eje x: tiempo en horas. Eje y: número de kilowatts usados por hora.

c) Eje x: tiempo en dias. Eje y: costo de estadía por días.

d) Eje x: volumen de sangre (en centimietros cúbicos). Eje y: Concetración de determinada droga (en miligramos por centimetros cúbicos).