Capítulo 0

Preliminares

Los ejercicios indicados con (*) son los sugeridos para trabajar en esta semana. Los demás ejercicios son complementarios (se puede elegir algún ejercicio para hacer de manera opcional).

0.1. Ecuaciones e inecuaciones

1. (*) Expresar en forma reducida cada uno de los siguientes números:

$$a)\ \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3 \qquad b)\ \left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad c)\ \left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{6}{5}\right)^2\left(\frac{6}{7}\right)^2$$

$$d)\ \left(\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}}\right)^{-2} \qquad e)\ \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{5}{4}\right)^{-3} \qquad f)\ \left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}}\right)\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}$$

$$g)\ 5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6} \qquad h)\ \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}-1\right)-\frac{4}{3} \qquad i)\ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}+1 \qquad j)\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)4-\frac{4}{3}$$

$$k)\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)^3 \qquad l)\ \left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)^3 \qquad m)\ \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)^3 \qquad n)\ \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^3$$

2. (*) Calcular:

$$a)\ \left|\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right|+\left|-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right| \qquad b)\ \left|\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right|-\left|-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right| \qquad c)\ \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right|$$

$$d)\ \frac{3}{4!}+\frac{1}{3!} \qquad e)\ \frac{3!}{5}+\frac{5}{3!} \qquad f)\ \frac{1}{3!}+\frac{5}{4!} \qquad g)\ \frac{6!}{4!}+\frac{4!}{6!}$$

3. (*) Calcular:

$$a)\ \left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^2 \qquad b)\ \sum_{k=1}^{5} k^2 \qquad c)\ \left|\sum_{k=1}^{5}\frac{(-1)^k}{k}\right| \qquad d)\ \sum_{k=1}^{5}\left|\frac{(-1)^k}{k}\right|$$

$$e)\ \prod_{k=1}^{3}(2k+1) \qquad f)\ \prod_{k=0}^{4}2^k \qquad g)\ \prod_{k=1}^{5}\frac{k+1}{k}$$

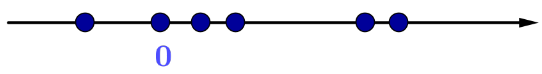
$$h)\ \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{i}2(k+1)\right) \qquad i)\ \sum_{i=2}^{4}\left(\prod_{k=1}^{i}k\right) \qquad j)\ \prod_{i=2}^{4}\left(\sum_{k=1}^{i}k\right)$$

4. (*) Para cada par de números determinar cuál es mayor

$$a)\ 15;\ \sqrt{220} \qquad b)\ \frac{150}{63};\ 2{,}75 \qquad c)\ 15^2;\ 10^3$$

$$d)\ \sin(2);\ 2 \qquad e)\ \log(2);\ 2 \qquad f)\ e^2;\ 2$$

5. (*) En la figura se muestran sobre la recta real los puntos 0, 1, $\sqrt{10}$, $\cos(1)$, $\cos(3)$, e. Determinar cuál punto corresponde a cada valor.



6. Determinar la tercera cifra después de la coma de los siguientes números

$$a)\ \frac{1}{6} \qquad b)\ \frac{1}{7} \qquad c)\ \frac{1}{15} \qquad d)\ \frac{1}{6}-\frac{1}{9} \qquad e)\ \frac{1}{9}-\frac{1}{5}$$

0.2. Polinomios

1. (*) Calcular las raíces de los siguientes polinomios:

$$a)\ x^2-3x+2 \qquad b)\ x^2-6x+9 \qquad c)\ x^2+1 \qquad d)\ x^2+6x+4$$

$$e)\ \left(x^2-1\right)\left(x^2-6\right) \qquad f)\ \left(x^2+2x+1\right)\left(x^2-4x+3\right) \qquad g)\ x(x-1)(x+2)(x-3)$$

$$h)\ x^6-4 \qquad i)\ x^6-x^3-2 \qquad j)\ x^{10}-4$$

$$k)\ x^4-2 \qquad l)\ x^4-x^2-2 \qquad m)\ x^8-2$$

2. (*) Calcular las raíces de los siguientes polinomios:

   a) $P(x)=x^3+2x$.
   b) $P(x)=2x^3+7x^2+6x$.
   c) $P(x)=x^3-x^2-4x+4$, sabiendo que 1 es raíz.

   d) $P(x) = 8x^3 + 14x^2 - 5x - 2$, sabiendo que $\frac{1}{2}$ es raíz.

3. **Polinomio de interpolación (I)**

   Fijos n puntos del plano $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, el polinomio de interpolación por estos puntos es el polinomio de grado $n-1$ que pasa por estos n puntos. En particular este polinomio se puede usar para aproximar funciones (tomando n puntos de la forma $(x, f(x))$). Una aplicación estandar para este polinomio es la aproximación en el cálculo de integrales.

   Calcular el polinomio de interpolación para la función $\frac{5}{1+x^2}$ en los puntos $-2, 0, 2$

   Calcular el polinomio de interpolación para la función $\sqrt{x}$ en los puntos $1, 4, 9$. Repetir para $0, 1, 4, 9$. No es necesario realizar las cuentas "a mano", simplemente plantea el sistema a resolver y luego utiliza algún software para obtener el polinomio de forma explícita.

0.3. Geometría

1. (*) En cada parte, determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos mencionados.

   a) $(1,4), (4,1)$ b) $(2,-3), (-2,1)$ c) $(4,3), (-5,3)$ d) $(3,5), (5,10)$

2. (*) En cada parte, determinar el centro y el radio de la circunferencia en cuestión.

   a) $3x^2 + 3y^2 - 18y + 18 = 0$ b) $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2 = 0$

3. En cada parte, determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos P, Q, S.

   a) $P = (0,-1), Q = (4,-1), S = (2,3)$ b) $P = (1,4), Q = (4,3), S = (5,2)$

4. En cada parte, determinar el centro, ejes y los diámetros mayor y menor de las siguientes elipses.

   a) $x^2 - 2x + 4y^2 - 3 = 0$ b) $4x^2 - 8x + y^2 - 5 = 0$

5. Determinar el eje de simetría de las siguientes parábolas.

   a) $x^2 + 2x - 5 = y$ b) $3x^2 + 5x - 7 = y$ c) $x^2 - 6x + 15 = y$

6. Calcular el área de los triángulos determinados por las siguientes ternas de vértices.

   a) $A = (2,2),\ B = (7,2),\ C = (4,5)$ b) $A = (1,1),\ B = (1,6),\ C = (4,7)$

   c) $A = (1,1),\ B = (5,2),\ C = (3,5)$ d) $A = (2,1),\ B = (6,3),\ C = (4,5)$

   e) $A = (1,1),\ B = (5,3),\ C = (7,6)$ f) $A = (1,1),\ B = (11,5),\ C = (8,2)$

0.4. Aplicaciones

(*) Hacer una de las partes.

1. **Concentraciones**

   a) Se tienen 2 tazas de capacidad 200 ml, la primera con 150 ml de café y la segunda con 150 ml de crema.

   Se quita una cucharada a la de crema y se la vuelca en el café, luego se revuelve bien hasta que se disuelva.

   Por último se toma una cucharada de la taza con esta solución y se la vuelca en la taza con crema.

   ¿Hay más café en la primera taza o más crema en la segunda?

   b) La regulación de rotulados de alimentos actual en Uruguay está regido por el decreto N 246/020. Por ejemplo, una bebida debe presentar el logo de exceso en azúcares si tiene más de 3g de azúcar agregado cada 100ml.

   Una empresa de bebidas gaseosas tiene en su catálogo una bebida cola común, que tiene una cantidad de azúcares agregados de 22g cada 200ml y una versión sin azúcares agregados.

   La empresa decide crear una nueva versión de estas bebidas mezclando común y sin azúcares, de forma que no deba tener el etiquetado de exceso en azúcares. ¿Cuánto es lo mínimo que se debe agregar de bebida sin azúcar a un litro de bebida común para cumplir los requisitos?

2. **Descuentos y porcentajes**

   a) Juan decide comprarse un celular nuevo, luego de ver distintos modelos selecciona su favorito. Dos casas de telefonía, Alfa y Bravo venden ese celular a $U\$S$ 900.

   La casa Alfa, al entrar en su semana aniversario, decide hacer un descuento del 20 %. Sin embargo, la casa Bravo decide no quedarse atrás y realiza un descuento del 40 %. Para no perder clientela, Alfa decide realizar un nuevo descuento del 20 %.

   ¿Dónde debería comprar Juan su celular?

   b) Si usted es un mayorista que compra un producto en \$20, ¿a cuánto deberá venderlo para obtener una ganancia del 15 % de su precio de venta?

   c) Un Shopping decide quitar el IVA a todos sus productos, realizando un descuento del 18.03 %. Sin embargo el impuesto IVA aumenta en un 22 % el costo del producto. ¿Es esta una publicidad engañosa?

3. **Dimensiones**

   a) Una empresa vende una bebida chocolatada en envases de 4,0×6,3×10,5 cm. Calcule la capacidad del envase. Sabiendo que la cantidad de bebida por producto es una capacidad estándar, determínela. Determine algún modelo de caja para transportar 10, 18 y 50 unidades. Compare con sus compañeros.

   b) Se desea embaldosar una habitación de 4m^2. Si cada baldosa mide 20cm^2 de lado. ¿Cuántas baldosas se necesitan como mínimo? Calcular para el caso de que la habitación sea de 2 metros de lado y el caso de que sea de 1 por 4.

      Repita el ejercicio para una habitacion de $4{,}5\text{m}^2$. Es decir, calcule cuántas baldozas mínimo se necesitan. ¿Qué ocurre si la habitación mide 1,5m por 3m? ¿Y si mide 1m por 4,5m?

0.5. Lógica

1. (*) En este ejercicio no importa si las frases son falsas o verdaderas.

   a) Negar, sin usar la palabra "no", las siguientes afirmaciones:

      1) *Ningún* $x \in \mathbb{R}$ *cumple que* $x^2 = -1$.
      2) *Algún juego de comedor trae menos de 3 sillas.*
      3) *Todos los hombres son inmortales.*

   b) Dar el recíproco y contrarrecíproco de las siguientes afirmaciones:

      1) *Si tu casa está pintada de blanco, gastas menos energía que el promedio.*
      2) *Si el piso está mojado es porque llovió.*

2. ¿Dónde está el error en la siguiente “demostración”?

   Sea $x = y$, entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= xy \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\ (x+y)(x-y) &= y(x-y) \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} x+y=y \\ 2y=y \\ 2=1 \end{gathered}$$

3. (*) Un ejemplo, una prueba.

   Probar que las siguientes igualdades son falsas:

   $a)$ $(a+b)^2 = a^2+b^2$ $\quad$ $b)$ $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ con $a,b>0$ $\quad$ $c)$ $\dfrac{1+ab}{b} = 1+a$ con $a,b>0$

   $d)$ $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ con $a,b \geq 0$ $\quad$ $e)$ $\sqrt[3]{a^3+b^3} = a+b$ $\quad$ $f)$ $\sqrt{a^4+b^4} = a^2+b^2$

4. La niña de los ojos azules.

   Se está creando una nueva inteligencia artificial (IA) y se le presenta el siguiente problema:

   Programador - *El señor Juan tiene 3 hijas ¿Puedes decirme sus edades?*

   IA - *Necesito más datos.*

   Programador - *El producto de sus edades es 36 mientras que su suma es la cantidad de ventanas de este edificio.*

   IA - *Conozco ese número pero necesito más datos.*

   Programador - *La hija menor tiene los ojos azules.*

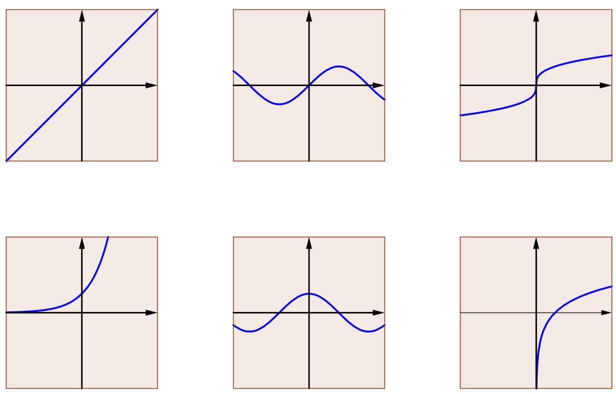
   Luego de esta última información la IA da la respuesta correcta.

   Determinar las edades de las niñas.

0.6. Funciones

1. (*) En la imagen se muestran los gráficos de las siguientes funciones:

$$x,\;\; x^{1/3},\;\; \log(x),\;\; e^x,\;\; \cos(x),\;\; \sin(x)$$



Determinar cuál es el gráfico que le corresponde a cada función.

2. **(*)** Determinar las raíces de las siguientes funciones en sus dominios correspondientes.

   a) $\sin(x)$ *b*) $\cos(x)$ *c*) $\tan(x)$ *d*) e^x *e*) $\sqrt{x}$ *f*) $\log(x)$

0.7. Complementarios

1. **Ternas pitagóricas**

   Una terna de números (a,b,c) se dice pitagórica si $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ y $a^2+b^2=c^2$. Por ejemplo $(5,12,13)$ es una terna pritagórica.

   a) Encontrar el segundo punto de intersección, diferente de $(-1,0)$, de la círcunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$ con la recta de ecuación $y=(x+1)/2$. Haciendo denominador común de sus coordenadas, verificar que la suma de los numeradores al cuadrado dá el denominador al cuadrado. Es decir, si el otro punto de intersección es $Q=\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$, entonces (a,b,c) forman una terna pitagórica.

   b) Considere ahora la recta de ecuación $y=\frac{m}{n}(x+1)$ con m,n naturales positivos. Hallar Q, el otro punto de intersección con la circunferencia $x^2+y^2=1$. Probar que las coordenadas de Q son racionales.

   c) Probar que si un punto de coordenadas racionales $Q=\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$ pertenece a la circunferencia, entonces (a,b,c) es una terna pitagórica.

   d) ¿Se te ocurre cómo generar todas las posibles ternas pitagóricas (a menos de multiplos)?

   En la página de EVA (dentro de la pestaña Capítulo 0: Preliminares) se encuentra una visualización geométrica de la parte b del problema de ternas pitagóricas.

2. **Fracciones Egipcias**

   Los antiguos Egipcios escribían todas sus fracciones como suma de fracciones de numerador uno, y además no se permitía repetir el mismo denominador en una suma. Por ejemplo

   $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

   era una manera válida para escribir 3/4 para ellos pero

   $$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$$

   no era una manera válida de escribir 2/7.

   a) Escribir 8/15 “como en antiguo Egipto”.

b) Escribir 2/7 “como en antiguo Egipto”.

c) ¿Podés divisar un método para encontrar la expresión Egipcia de una fracción cualquiera?

3. **Fracciones continuas**

   Las fracciones continuas sirven, entre otras cosas, para dar aproximaciones racionales buenas de números irracionales. Mientras que dar una aproximación de un irracional a partir de un número decimal da por lo general una aproximación “lineal” de este (es decir, la distancia depende linealmente del denominador). Las fracciones continuas dan una aproximación cuadrática en función del denominador.

   Usemos la notación $[2;1,4,3]$ para denotar la fracción $2+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}}$. Salvo el primer valor (que puede ser entero), el resto son naturales.

   a) Muestre que si $[a_1;a_2,a_3] \leq [b_1;b_2,b_3]$ con $1 \leq a_1 \leq b_1$ entonces $[a;a_1,a_2,a_3] \geq [a;b_1,b_2,b_3]$.

   b) Expresar 1, 1/2, 3/10, 3/100 como fracciones continuas.

4. **Polinomio de interpolación (II)**

   Calcular el polinomio de interpolación de f en lo siguientes casos:

   a) $f(x) = e^x$, por los puntos $0, 1, 2$

   b) $f(x) = \sin(x)$, por los puntos $-\pi, 0, \pi$

   c) $f(x) = \cos(x)$, por los puntos $-\pi, 0, \pi$

   d) $f(x) = \sin(x)$, por los puntos $-\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{4}$

   e) $f(x) = \cos(x)$, por los puntos $-\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{4}$