Solución segundo parcial CDIV

November 29, 2022

Ejercicio 1

1.1.a

$$\int_0^1 x^2\sin(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sin(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\sin(x)dx$$

Como $x^2\sin(x) \geq 0$ si $x \in [0,1/2]$ y $x^2\sin(x) > 0$ si $x \in [1/2,1]$ tenemos que

$$\left.\begin{array}{c} \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sin(x)dx \geq 0 \\ \text{y} \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\sin(x)dx > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^1 x^2\sin(x)dx > 0$$

Otra forma: Notar que $x^2\sin(x)$ es continua y no negativa en $[0,1]$, en 0 vale 0 y en 1 es mayor que cero. Entonces existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $x_0^2\sin(x_0) > 0$. Por continuidad existe $\delta > 0$ tal que $x^2\sin(x) > 0$ si $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$. Aplicamos TVM en este intervalo y obtenemos la igualdad $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} x^2\sin(x)\ dx = \alpha^2\sin(\alpha)2\delta > 0$ para un cierto $\alpha \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$. Luego $\int_0^1 x^2\sin(x)\ dx = \underbrace{\int_0^{x_0-\delta} x^2\sin(x)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} x^2\sin(x)}_{=\alpha^2\sin(\alpha)2\delta>0} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{1} x^2\sin(x)}_{\geq 0}$.

1.1.b

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\sin(x)dx &\underset{\text{partes}}{=} -\left. x^2\cos(x)\right|_0^1 + 2\int_0^1 x\cos(x)dx \\
&\underset{\text{partes}}{=} -\cos(1) + 2\left. x\sin(x)\right|_0^1 - 2\int_0^1 \sin(x)dx \\
&= 2\sin(1) - \cos(1) + 2\left.\cos(x)\right|_0^1 \\
&= 2\sin(1) + \cos(1) - 2
\end{aligned}$$

1.2

El área A del círculo de radio R es lo mismo que el área comprendida entre las funciones $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, por lo tanto

$$A = \int_{-R}^{R} f(x) - g(x)dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx$$

Sea $x = R\sin(u), u \in [-\pi/2, \pi/2]$, entonces por sustitución

$$A = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2(u)}R\cos(u)du = 2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(u)}\cos(u)du$$

$$\overset{(*)}{=} 2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)du$$

$(*)$ Como $\cos(u) \geq 0\ \forall u \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\sqrt{\cos^2(u)} = \cos(u)\ \forall u \in [-\pi/2, \pi/2]$.
Ahora, como

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \sin^2(u)du$$

$$\underset{\text{partes}}{=} (u + \cos(u)\sin(u))|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^2(u)du$$

$$\Rightarrow 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)du = \pi$$

Por lo tanto

$$A = \pi R^2$$

Ejercicio 2

2.1

Ver Teorico.

2.2

2.2.a

Definimos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$. Como e^{-t^2} es continua en $\mathbb{R}$, por Teorema Fundamental, F es derivable en R, y $F'(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Usando linealidad,

$$G(x) = \int_{x}^{x+1} e^{-t^2}dt = \int_{0}^{x+1} e^{-t^2}dt - \int_{0}^{x} e^{-t^2}dt = F(x+1) - F(x)$$

Derivamos utilizando aditividad y regla de la cadena,

$$G'(x) = F'(x+1)(x+1)' - F'(x) = e^{-(x+1)^2} - e^{-x^2}$$

2.2.b y 2.2.c

$$G'(x) = 0 \iff e^{-(x+1)^2} = e^{-x^2} \iff (x+1)^2 = x^2 \iff x = -1/2$$

Además

$$G'(x) = e^{-(x+1)^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(e^{-(x+1)^2+x^2} - 1) =$$

$$e^{-x^2}(e^{-2x-1} - 1).$$

Como e^{-x} es decreciente el signo de G' resulta como sigue.

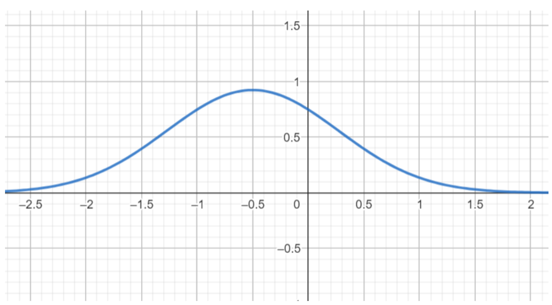
$$G'(-1/2) = 0$$

$$G'(x) < 0, \forall x > -1/2$$

$$G'(x) > 0, \forall x < -1/2$$

De donde se deduce que en -1/2 tengo un máximo relativo y absoluto.

Además observemos que como e^{-t^2} tiende a 0 en $+\infty$ y en $-\infty$, y el intervalo de integración es de longitud 1, los limites de G en $+\infty$ y en $-\infty$ tienden ambos a 0. G no tiene mínimo absoluto.



Bosquejo de G

Ejercicio 3.

$\cosh, \sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

3.1

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2\overbrace{e^x e^{-x}}^{=1} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

3.2.a

Podemos observar que $\sinh(0) = 0$ y esta es su única raíz. Para estudiar el crecimiento analizamos su derivada:

$$\big(\sinh(x)\big)' = \frac{e^x - e^{-x}.(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

Como $\cosh(x)$ es mayor que cero para todo $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que $\sinh(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Además

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to+\infty} - \overbrace{e^{-x}}^{\to 0}}{2} = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 0} - \overbrace{e^{-x}}^{\to+\infty}}{2} = -\infty$$

Entonces un gráfico aproximado de $\sinh(x)$ es como se muestra en la figura .

3.2.b

Por la parte anterior como $\lim\limits_{x\to+\infty} sinh(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} sinh(x) = -\infty$, y sinh es continua en R, por teorema de Bolzano sinh es sobreyectiva.

Por otro lado, como $\sinh'(x) = \cosh(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ tenemos que sinh es estríctamente creciente y por lo tanto inyectiva. Concluimos que $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es biyectiva y que tiene inversa $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

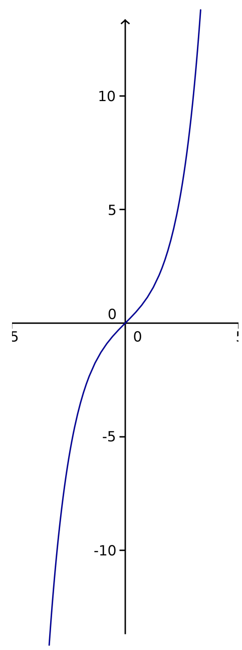


Figure 1: Bosquejo sinh

Como $\sinh'(x) = \cosh(x) > 0$, por el teorema de la función inversa $\sinh^{-1}$ es derivable en todo punto, usando la fórmula de la derivada de la función inversa tenemos que

$$\left(\sinh^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\cosh(sinh^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(sinh^{-1}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

3.3

Por la parte anterior,

$$\int_0^{3/4} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^{3/4} (sinh^{-1}(x))'dx = sinh^{-1}(3/4) - sinh^{-1}(0) = Ln(2)$$

Otro camino posible seria el siguiente. Utilizamos el cambio de variable $x = sinh(u)$, de donde $dx = cosh(u)du$.

$$\int_0^{3/4} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^{Ln2} \frac{cosh(u)}{\sqrt{1+sinh^2(u)}}du = \int_0^{Ln2} \frac{cosh(u)}{\sqrt{cosh^2(u)}}du \overset{cosh(u)\geq 0}{=} \int_0^{Ln2} 1du = Ln2$$