Cálculo diferencial e integral en una variable

Primer semestre de 2019

Segundo parcial – Junio de 2019

29 de junio de 2019

Nº Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del parcial es de cuatro horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Sugerencia: tenga cuidado al pasar las respuestas

Para los ejercicios de verdadero o falso y los de múltiple opción, lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir

Los ejercicios de desarrollo deben ser entregado en aparte, en hojas en las que deben aparecer su nombre y su cédula

VERDADERO O FALSO (Total: 10 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **V** o **F**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Correctas: 2 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 24 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**

Correctas: 6 puntos. Incorrectas: -1 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 26 puntos)

Dos ejercicios de desarrollo se encuentran en las páginas 3 y 4.

SOLO PARA USO DOCENTE

V/F	MO	D1	D2.a)	D2.b)	D2.c)	Total

Ejercicio: Verdadero o Falso (Total: 10 puntos)

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2+1}\right).$$

Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

(1) $f(x) = 0$ para infinitos valores de x.

(2) Existe un $x \in \mathbb{R}$ donde f no es derivable.

(3) f no tiene mínimo absoluto.

(4) f es monótona en $(1, +\infty)$.

(5) f tiene un punto crítico (es decir, un punto donde la derivada vale 0) que no es ni máximo ni mínimo.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 24 puntos)

1. La integral $\displaystyle\int_0^1 x \log\left(\sqrt{x^2+1}\right) dx$ es igual a:

(A) 1

(B) $\log\left(\sqrt{2}\right) - \dfrac{1}{4}$

(C) $2\log\left(\sqrt{2}\right) - 1$

(D) $1 - \log\left(\sqrt{2}\right)$

(E) $\dfrac{1}{2} - \log\left(\sqrt{2}\right)$

2. El polinomio de Taylor de orden 3 en el punto 1 de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 3e^{x^2-1}$ es:

(A) $p(x) = 3 + 6x + 9x^2 + 10x^3$.

(B) $p(x) = 3 + 6(x-1) + 18(x-1)^2 + 60(x-1)^3$.

(C) $p(x) = 3e^{-1} + 3e^{-1}(x-1)^2$.

(D) $p(x) = -4 + 18x - 21x^2 + 10x^3$.

(E) $p(x) = 3e^{x^2-1} + 6xe^{x^2-1}(x-1) + 3e^{x^2-1}(2x^2+1)(x-1)^2 + 2xe^{x^2-1}(2x^2+3)(x-1)^3$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Definimos f' como la derivada de f (en los puntos en los que la derivada existe). Entonces:

(A) f es discontinua en 0.

(B) f es continua en 0, pero no es derivable en 0.

(C) f es derivable en 0, pero f' no es continua en 0.

(D) f es derivable en 0, y f' es continua en 0, pero no derivable.

(E) f es derivable en 0, y f' también.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Supongamos que f es impar, es decir, $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Supongamos además que $f(1) = 1$, $f(2) = 4$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $f'(0) = 0$.

(II) Existe al menos un punto donde la derivada de f vale 2.

(III) Existen al menos dos puntos donde la derivada de f vale 3.

Con los datos que tenemos para f, las afirmaciones necesariamente verdaderas son:

(A) Solamente III.

(B) Solamente I. y II.

(C) Solamente II. y III.

(D) Solamente I. y III.

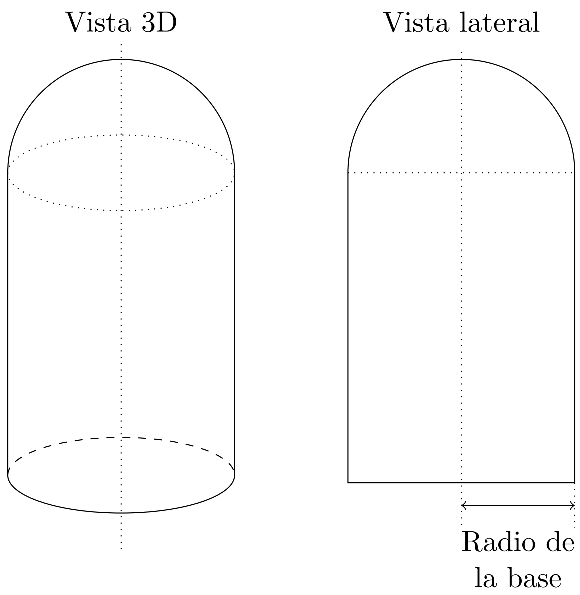
(E) Solamente II.

Ejercicios de desarrollo (Total: 26 puntos).

Recordatorio: está prohibido usar lápiz para escribir el texto de la respuesta. Única excepción: se podrá usar lápiz para trazar figuras. A la hora de corregir, sólo se tendrá en cuenta el texto escrito con tinta, y todo texto escrito con lápiz será ignorado por el corrector.

Ejercicio 1. (10 puntos)

Se quiere construir un silo para guardar semillas que tenga un volumen V_0 fijo. El silo debe tener piso circular, paredes cilíndricas y una media esfera como techo, como se muestra en la siguiente figura.



La estructura a construir incluye el techo, las paredes y el piso circular. Si el constructor cobra por metro cuadrado de superficie construida, hallar, en función de V_0, el radio de la base del silo que hace que el costo de construcción sea mínimo.

Recordar:

- Volumen de una esfera de radio R: $\frac{4}{3}\pi R^3$.
- Volumen de un cilindro de altura h y radio de la base R: $\pi R^2 h$.
- Superficie de la esfera de radio R: $4\pi R^2$.
- Superficie lateral (sin tapas) de un cilindro de altura h y radio de la base R: $2\pi Rh$.

Ejercicio 2. (16 puntos)

(a) **(8 puntos)** Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, se define $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ como $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Demostrar que F es derivable en (a,b) y que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

Notas: Se deben enunciar (pero no demostrar) todos los resultados que se utilicen. Estamos pidiendo la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo; por lo tanto, no se puede usar ese teorema para probar esta parte.

(b) **(3 puntos)** Sabemos que una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y que además $f(t) > 0$ para todo $t \in [0,1]$. Demostrar que $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ es estrictamente creciente. Concluir que F es invertible sobre su imagen.

(c) **(5 puntos)** Si además se sabe que $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,dt = \frac{1}{3}$ y que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}$, calcular $(F^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right)$.