Cálculo diferencial e integral en una variable

Primer semestre de 2018

Solución Segundo parcial – Julio de 2018

Ejercicios: Múltiple opción

Respuestas:

Para distinguir las versiones hacemos referencia al primer ejercicio.

Versión 1: La igualdad

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + cos(x) + asin(x) - (b + cx^2)}{x^2} = 0$$

se cumple...

1	2	3	4
A	A	D	C

Versión 2: Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y r la recta...

1	2	3	4
B	C	B	A

Versión 3: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x < 0 \\ e^{x^2+x} - (ax+1) & \text{si } x \in [0,1] \\ bx + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Los valores...

1	2	3	4
D	A	D	B

Versión 4: Sea $\arcsin : [-1,1] \to [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ la función inversa...

1	2	3	4
C	B	C	B

Resolución:

1. La igualdad

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + cos(x) + asin(x) - (b + cx^2)}{x^2} = 0$$

se cumple para los siguientes valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$

(A) $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$

(B) $c = 0$, y para todo $a, b \in \mathbb{R}$

(C) $a = 1$, $b = -1$, $c = -1/6$

(D) $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$

Solución: Llamemos $f(x) = e^x + \cos x + a \sin x$. Calculemos el polinomio de Taylor de orden 2 en 0 de f. Tenemos que $f(0) = 2$, y sus primeras dos derivadas son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - \sin x + a\cos x \Rightarrow f'(0) = 1 + a \\ f''(x) &= e^x - \cos x - a\sin x \Rightarrow f''(0) = 0 \end{aligned}$$

Entonces el polinomio de Taylor de orden 2 en 0 de f es $P_2(x) = 2 + (1 + a)x$. Si escribimos $f(x) = P_2(x) + r_2(x)$, sabemos por el teorema de Taylor que $\frac{r_2(x)}{x^2}$ tiende a 0 cuando $x \to 0$. Entonces el límite a calcular resulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - (b + cx^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + (1 + a)x + r_2(x) - (b + cx^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{2 - b}{x^2} + \frac{1 + a}{x} - c + \frac{r_2(x)}{x^2}\right]$$

Como el último sumando tiende a 0, para que el límite sea 0 deben anularse los primeros tres términos de la suma, obteniendo entonces que $a = -1$, $b = 2$ y $c = 0$.

2. Sea $\arcsin : [-1, 1] \to [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ la función inversa de la función $\sin(x)$ restringida al intervalo $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$. Se considera $H : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\arcsin(x)} \cos^2(t)dt$. Indicar la opción correcta:

(A) $H'(x) = \sqrt{1 - x^2}$, el valor máximo de H es $\pi/2$ y se alcanza en $x = 1$.

(B) $H'(x) = 1 - x^2$, el valor máximo de H es $\pi/2$ y se alcanza en $x = 1$.

(C) $H'(x) = \sqrt{1 - x^2}$, el valor máximo de H es 1 y se alcanza en $x = 0$.

(D) $H'(x) = 1 - x^2$, el valor máximo de H es 1 y se alcanza en $x = 0$.

Solución: Notar que:

$$H(x) = F(\arcsin(x)), \text{ donde } F(x) = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{x} \cos^2(t)dt$$

Luego aplicando el teorema fundamental y la regla de la cadena tenemos que

$$H'(x) = F'(\arcsin(x)) \arcsin'(x) = \cos^2(\arcsin(x)) \arcsin'(x)$$

Por la fórmula de la derivada de la inversa [1]

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

se obtiene que

$$H'(x) = \cos(\arcsin(x))$$

Como $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$ luego $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ de donde

$$H'(x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$$

Usando en la última igualdad que arcoseno es por definición inversa de seno.

[1] $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Notar que en particular H' es positiva en $(-1,1)$, por lo que H es creciente, luego el máximo de H se alcanza en $x=1$.
Para determinar el valor máximo de H, calculamos:

$$H(1) = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\arcsin(1)} \cos^2(t)dt = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \frac{\pi}{2}$$

3. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y r la recta de ecuación $x = -y$
Indique la opción correcta:

(A) La recta r interseca al gráfico de f en 3 puntos. En todos es tangente.
(B) La recta r interseca al gráfico de f en 2 puntos. En todos es tangente.
(C) La recta r interseca al gráfico de f en 3 puntos. Solo en dos es tangente
(D) La recta r interseca al gráfico de f en 2 puntos. Solo en uno es tangente.

Solución: Para empezar observemos que encontrar los puntos de intersección de la recta r con el gráfico de f equivale a encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = -f(x)$. Usando la definición de f, tenemos que

$$x = -f(x) = -x^3 + 6x^2 - 8x \iff -x^3 + 6x^2 - 9x = 0.$$

Es fácil ver que el polinomio $-x^3 + 6x^2 - 9x$ tiene raíz evidente en 0 y raíz doble en 3. Por lo tanto, $x = -f(x)$ para $x = 0$ y $x = 3$, y los puntos de intersección de la recta con el gráfico son $(0, f(0))$ y $(3, f(3))$.

Si para alguno de estos puntos se cumple que r es tangente al gráfico, entonces la derivada de f en dicho punto debe coincidir con la pendiente de r, que es -1.

Tenemos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$. Entonces, $f'(0) = 8$ y $f'(3) = -1$. Como la pendiente de r es -1, concluimos que la recta es tangente al gráfico en $(3, f(3))$ pero no en $(0, f(0))$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x < 0 \\ e^{x^2+x} - (ax+1) & \text{si } x \in [0,1] \\ bx + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Los valores de a, b y c para que f sea derivable en $\mathbb{R}$ son:

(A) $a = 1$, $b = -2e^2$, $c = 3e^2$
(B) No existen tales valores de a, b, c.
(C) $a = 1$, $b = 3e^2 - 1$, $c = -2e^2 - 1$.
(D) $a = 0$, $b = -2e^2$, $c = -2e^2 - 1$.

Solución:

- $\boxed{\text{Continuidad}}$
  - <u>En $x = 0$:</u>
    * $f(0) = e^{x^2+x} - ax - 1\big|_{x=0} = 0$

* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{x^2+x} - ax - 1 = 0$
* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2.sin(\frac{1}{x}) \underbrace{=}_{0.acotado} 0$

  Entonces $\underline{f \text{ es continua en } x = 0}$

- En $x = 1$:
  * $f(1) = e^{x^2+x} - ax - 1\big|_{x=1} = e^2 - 1 - a$
  * $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{x^2+x} - ax - 1 = e^2 - 1 - a$
  * $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2.sin(\frac{1}{x}) \underbrace{=}_{0.acotado} 0$

  $\Rightarrow$ Entonces $\underline{f \text{ es continua en } x = 1 \Leftrightarrow b + c = e^2 - 1 - a}$ (1)

- $\boxed{\text{Derivabilidad}}$
  - En $x = 0$
    * $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2.sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0^-} x.sin(\frac{1}{x}) \underbrace{=}_{0.acotado} 0$
    * $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = (2x+1).e^{x^2+x} - a\big|_{x=0} = 1 - a$

    Entonces $\underline{f \text{ es derivable en } x = 0 \Leftrightarrow a = 1}$ (2)

  - En $x = 1$
    * $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = (2x+1).e^{x^2+x} - a\big|_{x=1} = 3e^2 - a$
    * $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(bx+c)-(e^2-1-a)}{x-1} \underbrace{=}_{Usando\ (2)} \lim_{x\to 1^+} \frac{(bx+c)-(b+c)}{x-1} = b$

    Entonces $\underline{f \text{ es derivable en } x = 1 \Leftrightarrow 3e^2 - a = b + c}$ (3)

Entonces usando (1), (2) y (3) se obtiene que: $a = 1$, $b = 3e^2 - 1$ y $c = -2e^2 - 1$

Ejercicios de desarrollo.

Primer ejercicio de desarrollo.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b) y continua en b. Se sabe además que $\lim_{x\to a^+} f(x) < 0$ y $f(b) > 0$.

1. Probar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
2. Si además se sabe que la derivada de f en (a, b) tiene signo constante, demostrar que el punto c encontrado en la parte anterior es único.

Solución:

Parte a

Para probar esta parte aplicaremos el teorema de Bolzano.

Si f fuera continua en a, entonces $f(a) < 0$ de donde podriamos aplicar el teorema de Bolzano. Sin embargo, la continuidad de f en a no es parte de nuestra hipótesis.

Busquenos así un $a_0 \in (a, b)$ tal que $f(a_0) < 0$, ya que como f es continua $[a_0, b]$ y $f(b) > 0$ aplicando Bolzano en $[a_0, b]$ tenemos que existe $c \in (a_0, b) \subset (a, b)$ con $f(c) = 0$.

Llamemos $L = \lim_{x \to a^+} f(x) < 0$.

Aplicando la definición de límite lateral, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (a, a + \delta)$ se cumple $|f(x) - L| < |L|$. En particular $f(x) < 0$ para todo $x \in (a, a + \delta)$. Observar que $(a, a + \delta) \subset (a, b)$ pues $f(b) > 0$.

Tomando $a_0 = a + \delta/2$ tenemos que f continua en $[a_0, b]$ y $f(a_0)f(b) < 0$, luego aplicando Bolzano, existe $c \in (a_0, b) \subset (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Parte b

Supongamos que existen dos puntos distintos, $c_1 \neq c_2$, con $c_i \in (a, b)$ para los que $f(c_1) = 0 = f(c_2)$. Podemos suponer que $c_1 < c_2$, recordar que $a < c_i < b$ en particular $[c_1, c_2] \subset (a, b)$.

Aplicando el teorema de valor medio de Lagrange en el intervalo $[c_1, c_2]$ tenemos que existe un $d \in (c_1, c_2) \subset (a, b)$ tal que $f'(d) = 0$, lo cual es absurdo pues el signo de f es constante.

Segundo ejercicio de desarrollo.

1. Si $f(x) = \frac{-x^2+2x-3}{x^3-x^2+x-1}$, hallar F tal que $F' = f$
2. Calcular $\int_1^4 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}\, dx$

Solución:

1. Como $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$, por un teorema visto en teórico, podemos escribir:

$$\frac{-x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}.$$

Entonces multiplicando por $x - 1$ ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\frac{-x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)} = A + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}(x - 1).$$

Evaluando en $x = 1$ se llega a que $A = -1$.

Luego

$$\frac{Mx + N}{x^2 + 1} = \frac{-x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 + x - 1} + \frac{1}{x - 1}.$$

Haciendo cuentas se obtiene que

$$\frac{Mx + N}{x^2 + 1} = \frac{2}{x^2 + 1}.$$

Por lo tanto $M = 0$ y $N = 2$.

Entonces

$$\frac{-x^2+2x-3}{x^3-x^2+x-1} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x^2+1}.$$

Por lo tanto un posible F es:

$$F(x) = -\log|x-1| + 2\arctan(x).$$

2. Tomando el cambio de variable $u = \sqrt{x}$ se obtiene que

$$\int_1^4 \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^2 u^2e^u\,du$$

Usando el método de integración por partes se obtiene que:

$$\int_1^2 u^2e^u\,du = u^2e^u\big|_1^2 - 2\int_1^2 ue^u\,du$$

Usando partes nuevamente:

$$\int_1^2 ue^u\,du = ue^u|_1^2 - \int_1^2 e^u\,du = (ue^u - e^u)|_1^2$$

Entonces:

$$\int_1^2 u^2e^u\,du = (u^2e^u - 2ue^u + 2e^u)\big|_1^2 = 2e^2 - e$$

Luego la integral pedida vale:

$$\int_1^4 \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx = 2(2e^2 - e)$$