PRIMER PARCIAL de CDIV - Segundo semestre 2023 - Versión 11

sábado **23** de setiembre de 2023

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 40 puntos.
- La duración del parcial es de tres horas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- **Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros correspondientes.**
- La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Respuestas de los ejercicios de Verdadero Falso. Total: 10 puntos

Puntajes: 1 punto si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Llenar cada casilla con la respuesta **V o F** según corresponda.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10
F	F	F	V	V	V	V	V	V	F

Respuestas de los ejercicios de múltiple opción. Total: 30 puntos

Puntajes: 6 puntos si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D o E** según corresponda.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
C	A	A	D	B

Notación:

En el parcial se usa la siguiente notación:

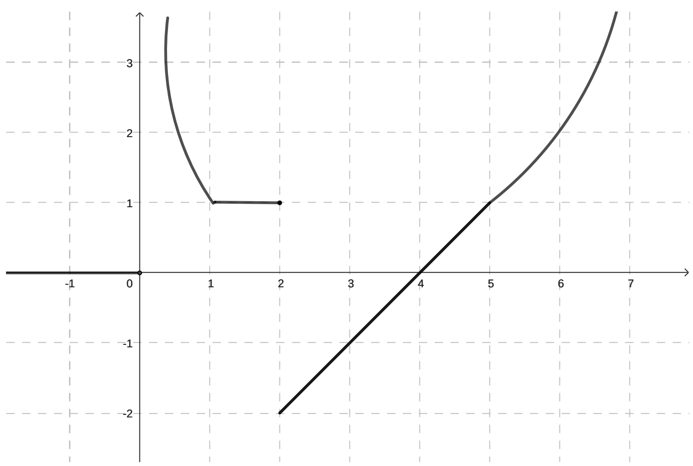
- $E(x,r)$ denota el entorno real de centro x y radio r.
- $E^*(x,r)$ denota el entorno reducido real de centro x y radio r.
- $S^*(f,P)$ denota la suma superior de f con respecto a la partición P.
- $S_*(f,P)$ denota la suma inferior de f con respecto a la partición P.

página en blanco

(I) Ejercicios de Verdadero Falso. Total: 10 puntos

Para las siguientes afirmaciones considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida y graficada a continuación y la función $G:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida a partir de f como $G(x)=\int_1^x f(t)dt$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\leq 0,\\ \frac{1}{x}, & \text{si } x\in(0,1],\\ 1, & \text{si } x\in(1,2],\\ x-4, & \text{si } x\in(2,5],\\ (x-5)^2+1, & \text{si } x>5.\end{cases}$$



Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

Afirmación 1: f es continua.

Afirmación 2: f no es integrable en el intervalo $[\frac{1}{2},7]$.

Afirmación 3: Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Afirmación 4: f no es sobreyectiva.

Afirmación 5: G es continua en el intervalo $[1,7]$.

Afirmación 6: Existe $x_0\in\left[\frac{3}{2},3\right]$ tal que $G(x_0)=0$.

Afirmación 7: $\forall r>0$ y $\forall M>0$ se tiene que $\exists x\in E(0,r)$ que cumple que $|f(x)|>M$.

Afirmación 8: $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que si $x\in E(5,\delta)$, entonces $|f(x)-1|<\epsilon$.

Afirmación 9: $\forall\delta>0$, $\exists x\in E^*(2,\delta)$ que cumple que $f(x)\notin E(f(2),1)$.

Afirmación 10: Existe P partición de $[4,5]$ tal que la suma superior $S^*(f_{|_{[4,5]}},P)=\frac{1}{2}$, donde $f_{|_{[4,5]}}$ denota la restricción de f al intervalo $[4,5]$.

(II) Ejercicios de múltiple opción. Total: 30 puntos

Ejercicio 1

Se considera el conjunto $A = \left\{ \dfrac{2^{n+1}-1}{2^n} \, : \, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$, entonces

A) A no está acotado inferiormente.
B) A tiene ínfimo pero no mínimo.
C) A tiene supremo pero no máximo .
D) A tiene supremo y máximo.
E) A no esta acotado superiormente.

Ejercicio 2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$ y $P = \{-1, 0, 1, 2\}$ una partición del intervalo $[-1, 2]$. Si $S_*(f, P)$ es la suma inferior correspondiente a la partición P, entonces $S_*(f, P)$ vale:

A) -2 B) 0 C) $\frac{2}{3}$ D) 3 E) 5

Ejercicio 3

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables tales que:

$$\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \quad \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3, \quad \text{y} \quad \int_2^4 g(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

La integral $\displaystyle\int_2^4 (5f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x$ es igual a

A) -14 B) $-\frac{25}{2}$ C) -10 D) $\frac{27}{2}$ E) 16

Ejercicio 4

Indique cuánto vale el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} \operatorname{sen}(1-x) + \frac{x^2-1}{x-1} - (x-3)$$

A) No existe. B) 0 C) 2 D) 4 E) $+\infty$

Ejercicio 5

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right), & \text{si } x < 1, \\ ax + b, & \text{si } x \in [1, 2], \\ \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Los valores de a y b para los cuales f es continua son:

A) $a = b = 0$
B) $a = 4$, $b = -4$
C) $a = 3$, $b = -3$
D) $a = 3$, $b = -4$
E) f no es continua para ninguna elección de a y b.