Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Cálculo diferencial e integral en una variable
Segundo semestre 2022

Primer Parcial

Duración: 3hs

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1. Para este ejercicio se asume como verdadera la siguiente afirmación: si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, entonces f es Riemann integrable en [a,b]

1. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada. Prueba que si f tiene una única discontinuidad en algún $c\in[a,b]$, entonces f es Riemann integrable.
2. Sea $f:[0,7/2]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$. Recuerda que $\lfloor x\rfloor$ representa la parte entera de x.
   a) Bosqueja f y prueba que f es Riemann integrable.
   b) Calcula $\int_0^{7/2} f(t)\,dt$.
   c) Sea $F:[0,7/2]\to\mathbb{R}$ tal que $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Bosqueja F y determina si F es continua.
   d) Sea $G:[0,7/2]\to\mathbb{R}$ tal que $G(x)=\int_1^x f(t)\,dt$. Bosqueja G y determina $F-G$.

Ejercicio 2. Sea $A\subset\mathbb{R}$ un conjunto no vacío, acotado superiormente tal que $\alpha=\sup(A)$.

1. Prueba que para todo $\delta>0$, existe $a_\delta\in A$ tal que $\alpha-\delta<a_\delta\le\alpha$.
2. Prueba que si $\alpha\notin A$, entonces A es infinito.
3. Muestra un ejemplo de un conjunto A en las condiciones de la parte anterior que sea numerable y otro ejemplo de un conjunto A que sea no numerable. Justifica tu respuesta.

Solución:

Ejercicio 1:
1. Supongamos sin pérdida de generalidad que $c\in(a,b)$. Como f está acotada en $[a,b]$, existe $M>0$ tal que $|f(x)|<M$ para todo $x\in[a,b]$. Dado $\epsilon>0$, vamos a tomar un $\delta>0$ tal que $\delta<\frac{\epsilon}{2M}$. Con esto denominamos $\alpha=c-\delta/2$ y $\beta=c+\delta/2$ (de esta forma vamos a controlar las sumas superiores e inferiores en un pequeño entorno del punto de discontinuidad). Por ser f continua en $[a,\alpha]$, es integrable. Entonces existe una partición P_α de $[a,\alpha]$ tal que $S^*(f|_{[a,\alpha]},P_\alpha)-S_*(f|_{[a,\alpha]},P_\alpha)<\epsilon$. Análogamente existe P_β partición de $[\beta,b]$ tal que $S^*(f|_{[\beta,b]},P_\beta)-S_*(f|_{[\beta,b]},P_\beta)<\epsilon$. Notar que $P=P_\alpha\cup P_\beta$ es partición de $[a,b]$. Por tanto

$$\begin{aligned}
S^*(f,P)-S_*(f,P) &< S^*(f|_{[a,\alpha]},P_\alpha)-S_*(f|_{[a,\alpha]},P_\alpha)+S^*(f|_{[\beta,b]},P_\beta)-S_*(f|_{[\beta,b]},P_\beta)+\left(\sup_{x\in[\alpha,\beta]}\{f(x)\}-\inf_{x\in[\alpha,\beta]}\{f(x)\}\right)\delta\\
&< \epsilon+\epsilon+2M\delta\\
&< 3\epsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que f es integrable en $[a,b]$.
El caso en que f sea discontinua en a o en b es análogo.

2. a)

Figura 1: Bosquejo de f

Por la parte anterior, si f es acotada y tiene un número finito de discontinuidades, entonces es Riemann integrable.

b) $\int_0^{7/2} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt + \int_2^{7/2} = 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/8.$

c) Notar que podemos encontrar una expresión analítica de F que no dependa del símbolo de la integral,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{(x-2)^2}{2} + 1 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{3}{2} & \text{si } 3 \leq x < 7/2 \end{cases}$$

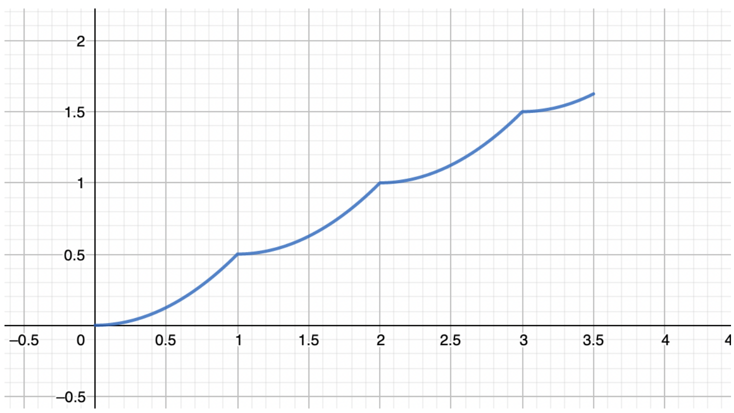

Figura 2: Bosquejo de F

F es continua por ser su expresión $F(x)$ polinómica en cada subintervalo y pegarse correctamente en $1, 2$ y 3.

d) Notar que $\int_0^1 f = \int_0^x f + \int x^1 f = \int_0^x f - \int 1^x f = F - G$. Por tanto $(F-G)(x) = 1/2$, es decir que $G(x) = F(x) - 1/2$ y esto implica que el bosquejo de G se obtiene del de F trasladandolo $1/2$ hacia abajo.

Ejercicio 2

1. Supongamos que la afirmación no es cierta. Entonces existe $\delta > 0$ tal que cualquier $a \in A$ cumple que $a \leq \alpha - \delta$. Como $\alpha \notin A$, esto contradice que α es el supremo de A.

2. Tomamos $\delta_n = \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la parte anterior encontramos $a_n \in A$ tal que $\alpha - \frac{1}{n} < a_n < \alpha$. El conjunto $\{a_n\}$ es infinito pues a medida que n aumenta, $\frac{1}{n} \to 0$.

3. Tomamos primeramente $A = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Notar que $\sup A = 1$ y A es numerable (es inmediata la biyección con $\mathbb{N}$).
Por otro lado consideramos $A = (0, 1)$. $\sup A = 1$ y A es no numerable por ser un intervalo no degenerado. (Existe una biyección con $\mathbb{R}$)

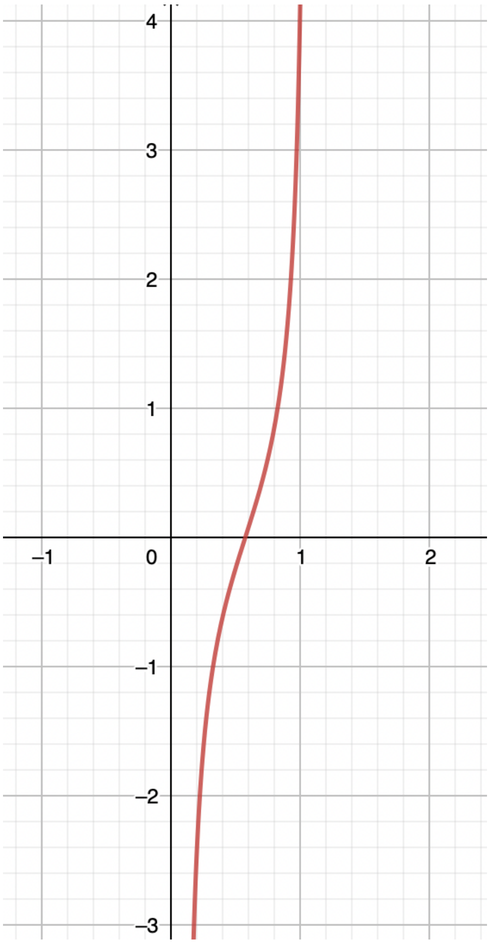

Figura 3: biyección entre $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$.