Cálculo diferencial e integral en una variable **2do semestre de 2020**

Primer parcial 24 de octubre de 2020

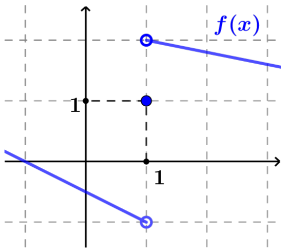
N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del parcial es de dos horas y media, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 4 puntos)

Correctos: 1 punto. Incorrectos: −1 punto. Sin responder: 0 puntos.

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función cuyo gráfico es el siguiente:



Entonces se tiene que $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función acotada. Si f es integrable en el intervalo $[a,b]$, entonces existe una partición P de $[a,b]$ tal que $S_*(f,P) = S^*(f,P)$.

3. Sea $A\subset\mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado. Si $\alpha = \text{ínf}(A)$ y $\beta = \sup(A)$, entonces se tiene que $A\subset[\alpha,\beta]$.

4. Para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n>1$, se tiene que $\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k+2} = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{k+2}\right)+n$.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 36 puntos)

Correctos: 6 puntos. Incorrectos: −2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

1. Sea $A\subset\mathbb{N}\setminus\{0\}$ un conjunto no acotado. Sea $B=\left\{\frac{1}{a} : a\in A\right\}\subset\mathbb{R}$. Entonces:

(A) El conjunto B no está acotado.
(B) El conjunto B tiene máximo y mínimo.
(C) El conjunto B tiene máximo e ínfimo, pero no tiene mínimo.
(D) El conjunto B tiene supremo e ínfimo, pero no tiene mínimo ni máximo.

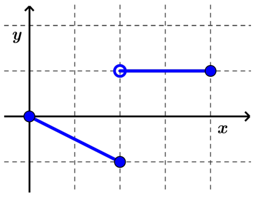
2. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2-4$ y P la partición del intervalo $[-3,3]$ definida por $P=\{-3,-2,1,3\}$. La suma superior $S^*(f,P)$ vale:

(A) 39 (B) 15 (C) 27 (D) −6

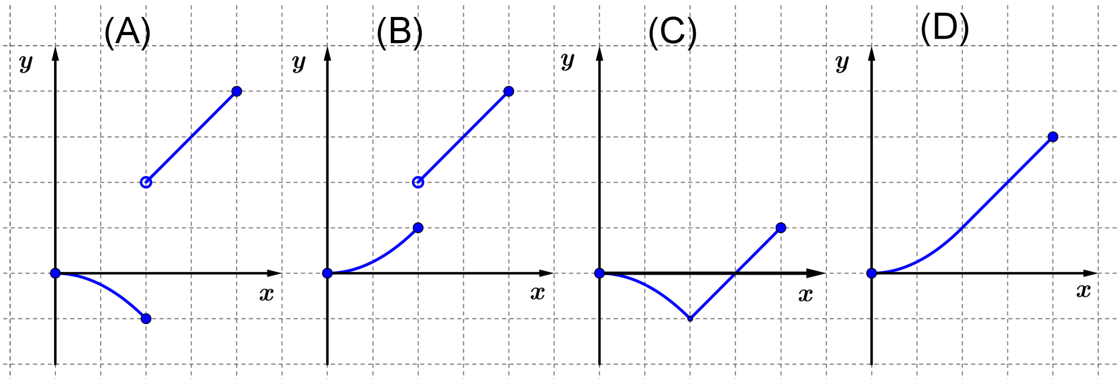
3. Se consideran las funciones continuas $f : [0,2] \to (0,5)$ tales que $f(0) = 1$, $f(1) = 4$ y $f(2) = 3$. Indicar la opción correcta:

(A) Ninguna de esas funciones es inyectiva ni sobreyectiva.
(B) Ninguna de esas funciones es sobreyectiva. Además algunas son inyectivas.
(C) Ninguna de esas funciones es inyectiva. Además algunas son sobreyectivas.
(D) Algunas de esas funciones son biyectivas.

4. Sea $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ la función dada por el siguiente gráfico:



Se define la función $F : [0, L] \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
Indicar cuál de los siguientes gráficos es el de F.



5. Dados parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función f es continua para los siguientes valores de $a, b \in \mathbb{R}$:

(A) $a = -1/4$ y $b = 3/4$
(B) $a = -1/4$ y $b = 1/4$
(C) $a = 3/4$ y $b = -1/4$
(D) $a = 1/2$ y $b = -1/2$

6. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0} (g(x))^2 = 6$. Entonces:

(A) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.
(B) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \sqrt{6}$.
(C) No tiene por qué existir el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ pero sí existe el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} |f(x)g(x)|$.
(D) No tiene por qué existir el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ ni el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} |f(x)g(x)|$.