Cálculo diferencial e integral en una variable

Primer parcial – Mayo de 2019

Solución

La versión se identifica por el primer ejercicio del múltiple opción.

Versión 1. Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 < 2\} \cap [0, +\infty)$...

VERDADERO O FALSO

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
V	F	F	V	V	V	V	V	V	F

MÚLTIPLE OPCIÓN

1	**2**	**3**	**4**	**5**
B	A	A	D	C

Versión 2. Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ una función definida mediante...

VERDADERO O FALSO

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
V	F	V	V	V	F	F	V	V	V

MÚLTIPLE OPCIÓN

1	**2**	**3**	**4**	**5**
E	B	D	A	D

Versión 3. Se consideran $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, con $f(x) = -3x^2 + 7x$ y $g(x) = \dfrac{4}{x}$...

VERDADERO O FALSO

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
V	V	V	F	V	F	V	V	F	V

MÚLTIPLE OPCIÓN

1	**2**	**3**	**4**	**5**
B	C	E	A	E

Versión 4. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función acotada...

VERDADERO O FALSO

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
F	V	V	V	V	F	F	V	V	V

MÚLTIPLE OPCIÓN

1	**2**	**3**	**4**	**5**
C	E	C	C	B

Ejercicio de desarrollo

1. La gráfica de f es:

2. Tomemos $\delta = 1/5$. Veamos que se cumple lo pedido:
   Si $|x-4| < \delta$ y $x \leq 4$, entonces $|f(x) - f(4)| = |1-1| = 0 < 1/5$.
   Si $|x-4| < \delta$ y $x > 4$, entonces $|f(x) - f(4)| = |-x+5-1| = |x-4| < 1/5$.

3. Probaremos que $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$. Sea $\varepsilon > 0$, y tomemos $\delta = \varepsilon$.
   Si $|x-4| < \delta$, $x \in [0,5]$ y $x \leq 4$, entonces $|f(x) - f(4)| = |1-1| = 0 < \varepsilon$.
   Si $|x-4| < \delta$, $x \in [0,5]$ y $x > 4$, entonces $|f(x) - f(4)| = |-x+5-1| = |x-4| < \delta = \varepsilon$.
   Por lo tanto,
   $$x \in [0,5] \text{ y } |x-4| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(4)| < \varepsilon.$$
   Esta parte también puede probarse viendo que:
   $$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = 1 = f(4)$$

4. Separamos la integral como:
   $$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx + \int_4^5 f(x)\,dx.$$
   El primer sumando es el área de un rectángulo de base 4 y altura 1, por lo que vale 4. El segundo es el área de un triángulo de base 1 y altura 1, por lo que vale $1/2$. Entonces:
   $$\int_0^5 f(x)\,dx = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

5. Consideremos la partición:
   $$P = \left\{0, 4, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}, 5\right\}$$
   Entonces:
   $$S^*(f,P) = 4 \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = 4 + \frac{2}{3}.$$
   $$S_*(f,P) = 4 \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 = 4 + \frac{1}{3}.$$
   Así:
   $$S^*(f,P) - S_*(f,P) = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$