Cálculo diferencial e integral en una variable

Primer semestre de 2019

Primer parcial – Mayo de 2019

4 de mayo de 2019

Nº Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del parcial es de cuatro horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Sugerencia: tenga cuidado al pasar las respuestas

Para los ejercicios de verdadero o falso y los de múltiple opción, lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir

El ejercicio de desarrollo debe ser entregado en una hoja aparte, en la que deben aparecer su nombre y su cédula

VERDADERO O FALSO (Total: 10 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **V** o **F**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Correctas: 1 puntos. Incorrectas: -1 puntos. Sin responder: 0 puntos.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 20 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Correctas: 4 puntos. Incorrectas: -1 punto. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 10 puntos)

Un ejercicio de desarrollo se encuentra en la página 4.

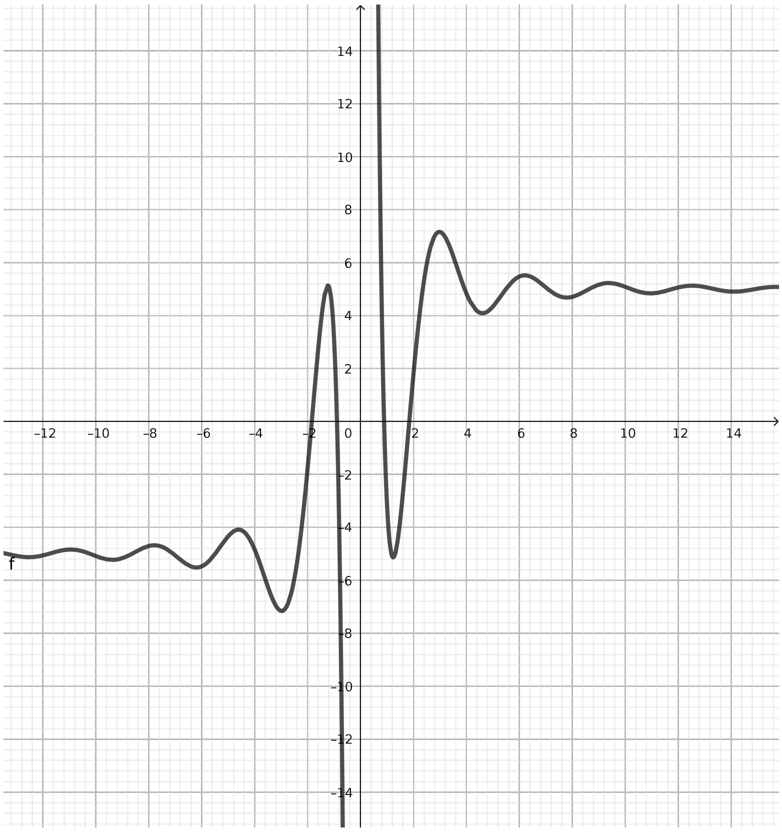
SOLO PARA USO DOCENTE

V/F	MO	D1.1	D1.2	D1.3	D1.4	D1.5	Total

Ejercicio: Verdadero o Falso (Total: 10 puntos)

La figura muestra la gráfica de la función $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\left(\frac{100\cos(2x)+1}{5x^2} + 5\right)$$



Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

(1) La función es continua en $(0, +\infty)$.

(2) Es posible extender f a una función continua en todo $\mathbb{R}$ eligiendo apropiadamente el valor $f(0)$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 5$.

(5) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx < 0$.

(6) $\displaystyle\int_{14}^{10} f(x)\,dx < 0$.

(7) f es acotada en $[5, +\infty)$.

(8) Para todo $a > 0$, f es acotada en $[a, +\infty)$.

(9) Para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = -f(-x)$.

(10) No existe $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 20 puntos)

1. Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 < 2\} \cap [0, +\infty)$. Elija la opción correcta:

(A) Este conjunto tiene supremo, ínfimo, máximo y mínimo.
(B) El mínimo de este conjunto es 0 y no hay máximo.
(C) Este conjunto tiene supremo e ínfimo, pero no tiene ni máximo ni mínimo.
(D) Este conjunto tiene ínfimo pero no supremo.
(E) Este conjunto tiene supremo pero no ínfimo.

2. Se consideran $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, con $f(x) = -3x^2 + 7x$ y $g(x) = \dfrac{4}{x}$. Entonces el área de la región acotada comprendida entre los gráficos de f y g vale:

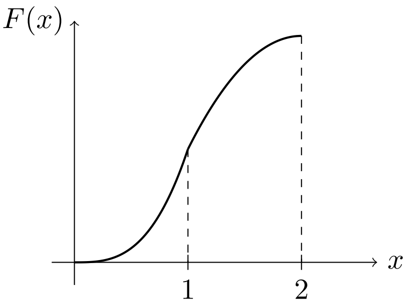
(A) $\frac{7}{2} - 4\log(2)$ (B) $4\log(3) - 2$ (C) $3 + 4\log(2)$
(D) $4\log(3) - 1$ (E) $4\pi - 2\log(2)$

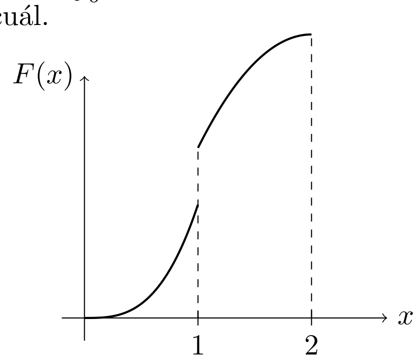
Sugerencia: Recordar que $\log(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{x}\,dx$.

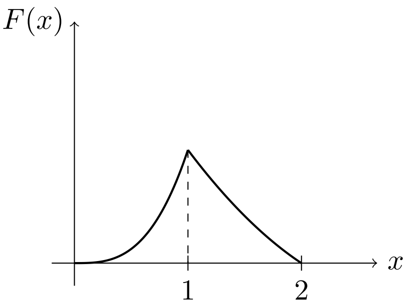
3. Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ una función definida mediante:

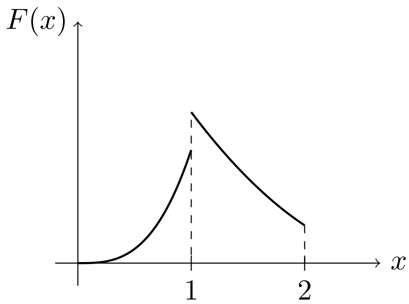
$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t \in [0,1] \\ -2t+4 & \text{si } t \in (1,2] \end{cases}$$

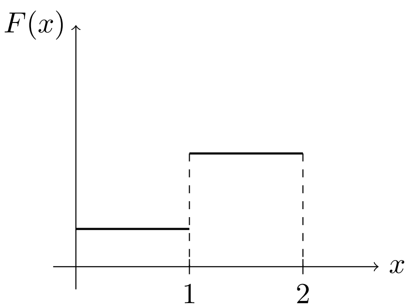
Definimos una nueva función $F : [0,2] \to \mathbb{R}$ como $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Solo una de las siguientes figuras se corresponde con el gráfico de F. Indicar cuál.

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


4. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Consideremos las dos afirmaciones siguientes:

Af.1: f es integrable $\iff$ $\forall\, Q$ partición de $[0,1]$ $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $S^*(f,Q) - S_*(f,Q) < \varepsilon$.

Af.2: f es integrable $\iff$ $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, Q$ partición de $[0,1]$ tal que $S^*(f,Q) - S_*(f,Q) < \varepsilon$.

Elija la opción correcta:

(A) Las dos afirmaciones son equivalentes y son verdaderas.
(B) Las dos afirmaciones son equivalentes y son falsas.
(C) Las afirmaciones no son equivalentes. La primera es verdadera y la segunda es falsa.
(D) Las afirmaciones no son equivalentes. La primera es falsa y la segunda es verdadera.
(E) Las afirmaciones no son equivalentes. Ambas son falsas.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) f es continua en 0. (II) f es continua en 1. (III) $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^+$.

Indique la opción correcta:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(B) Todas las afirmaciones son falsas.
(C) I. es verdadera, II. y III. son falsas.
(D) I. y III. son verdaderas y II. es falsa.
(E) II. y III. son verdaderas y I. es falsa.

Ejercicio de desarrollo (Total: 10 puntos).

Recordatorio: está prohibido usar lápiz para escribir el texto de la respuesta. Única excepción: se podrá usar lápiz para trazar figuras. A la hora de corregir, sólo se tendrá en cuenta el texto escrito con tinta, y todo texto escrito con lápiz será ignorado por el corrector.

Sea $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ una función definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,4] \\ -x+5 & \text{si } x \in (4,5] \end{cases}$$

1. Realizar un bosquejo del gráfico de f.
2. Encontrar un número $\delta > 0$ tal que todos los x con $|x-4| < \delta$ tienen imagen $f(x)$ que cumple $|f(x) - f(4)| < 1/5$.
3. Demostrar, usando la definición, que f es continua en 4.
4. Calcular $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$. Explicar el razonamiento usado.
5. Dar una partición P del intervalo $[0,5]$ tal que $S^*(f,P) - S_*(f,P) < \dfrac{1}{2}$.

   Nota: $S^*(f,P)$ y $S_*(f,P)$ indican, respectivamente, la suma superior e inferior de la función f respecto a la partición P.