Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en una Variable**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo semestre 2018**

PRIMER PARCIAL – SOLUCIONES – SÁBADO 29 DE SETIEMBRE DE 2018

Nro parcial	Cédula	Apellido y nombre

Primer ejercicio versión 1: Sea A un conjunto de números reales...
Primer ejercicio versión 2: Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$...

(I) Múltiple opción. Total: 16 puntos
Versión 1

Ejercicio 1	Ejercicio 2
(a)	(b)

Versión 2

Ejercicio 1	Ejercicio 2
(c)	(b)

(II) Completar en el espacio asignado. Total: 14 puntos
Ejercicio 1(8 puntos):
Versión 1:

$$\boxed{\left\{-\frac{\sqrt{10}}{6}, -\frac{\sqrt{5}}{3}, 0, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{6}\right\}}$$

Versión 2:

$$\boxed{\left\{-\frac{\sqrt{14}}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{14}}{4}\right\}}$$

Ejercicio 2(6 puntos):
Versión 1:

$$\boxed{-\frac{1}{2}}$$

Versión 2:

$$\boxed{\frac{2}{3}}$$

(III) Desarrollo. Total: 10 puntos

(a) Probar por inducción completa la siguiente igualdad para todos los naturales:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

(b) Calcular $\int_0^3 x^2$ utilizando el concepto de suma superior y/o inferior (no es necesario probar que la función es integrable en $[0, 1]$).

Soluciones desarrollo

(a)
- Paso base $n=1$: por un lado $\sum_{i=0}^{1} i^2 = 0^2 + 1^2 = 1$. Por otro lado $\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6} = 1$.
- Paso inductivo.

  Hipótesis inductiva para $n = h$:
$$\sum_{i=0}^{h} i^2 = \frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{2} + \frac{h}{6}$$
  Tesis inductiva para $n = h+1$:
$$\sum_{i=0}^{h+1} i^2 = \frac{(h+1)^3}{3} + \frac{(h+1)^2}{2} + \frac{(h+1)}{6}$$
  Demostración:
  $\sum_{i=0}^{h+1} i^2 = \sum_{i=0}^{h} i^2 + (h+1)^2 = \frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{2} + \frac{h}{6} + (h+1)^2$ utilizando la hipótesis inductiva.
  Por otro lado, $\frac{(h+1)^3}{3} + \frac{(h+1)^2}{2} + \frac{(h+1)}{6} = \frac{h^3+3h+3h^2+1}{3} + \frac{h^2+2h+1}{2} + \frac{h}{6} = \frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{2} + \frac{h}{6} + h^2 + 2h + 1$
  llegando a la igualdad buscada.

(b) Consideramos una equipartición de $[0, b]$ de la forma $P_n = \{0, \frac{b}{n}, \dots \frac{bi}{n}, \dots, \frac{b(n-1)}{n}, b\}$ y luego tomamos la suma superior correspondiente.
$$S^*(x^2, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$
Como x^2 es una función creciente $M_i = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2$ y al ser una equipartición, $x_{i+1} - x_i = \frac{b}{n}$ para todo i por lo tanto,
$$S^*(x^2, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b(i+1)}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b^2}{n^2}(i+1)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right).$$
Si tomamos
$$inf\{S^*(x^2, P_n) : n \in \mathbb{N}\} = inf\{\frac{b^3}{n^3}(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}) : n \in \mathbb{N}\} = inf\{\frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2} : n \in \mathbb{N}\} = \frac{b^3}{3}.$$
Si hacemos la cuenta análoga para las sumas inferiores obtenemos que
$$S_*(x^2, P_n) = \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-1)}{6}\right)$$
y
$$sup\{S_*(x^2, P_n) : n \in \mathbb{N}\} = \frac{b^3}{3}$$
En conclusión,
Versión 1: $\int_0^3 x^2 = \frac{3^3}{3} = 9$

Versión 2: $\int_0^2 x^2 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$.