Cálculo diferencial e integral en una variable

Primer semestre de 2018

Primer parcial – Mayo de 2018

5 de mayo de 2018

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del parcial es de cuatro horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Sugerencia: tenga cuidado al pasar las respuestas.
Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 20 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**

Correctas: 5 puntos. Incorrectas: -1 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 20 puntos)

Dos ejercicios de desarrollo se encuentran en la página 3.

SÓLO PARA USO DOCENTE

MO	D1	D2.1	D2.2	D2.3	Total

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 20 puntos)

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Si f es continua en 1 y $\int_0^3 f(x)\,dx = 0$, entonces los valores de a y b son:

(A) $a = 6$, $b = -4$.
(B) No existen a, b que cumplan estas condiciones.
(C) $a = 2$, $b = 0$.
(D) $a = 0$, $b = 2$.
(E) $a = -3$, $b = -1$.

Puede ser útil recordar que $\int_0^m x^2\,dx = \frac{m^3}{3}$.

2. Sean A, B subconjuntos acotados y no vacíos de $\mathbb{R}$, $\alpha = \inf(A)$ y $\beta = \sup(B)$.
Se consideran las siguientes afirmaciones:

I. El número $h = \alpha - 1$ es una cota inferior de A.

II. $A \subseteq (\alpha, \beta)$.

III. Si $A \subseteq B$ entonces $\alpha \geq \inf(B)$ y $\beta \leq \sup(A)$.

Indique la opción correcta:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(B) Todas las afirmaciones son falsas.
(C) I. es verdadera, II. y III. son falsas.
(D) I. y III. son verdaderas y II es falsa.
(E) I. es falsa, II. y III. son verdaderas.

3. Sea $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable. Se consideran las siguientes afirmaciones:

I. Existe una partición P de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) - S_*(f, P) < 1/100$.

II. Sea P una partición del intervalo $[2, 4]$. Si se tiene que $S^*(f, P) < 0$ entonces $\int_2^4 f(t)\,dt < 0$.

III. Si $\int_{-2}^0 f(t)\,dt = 8$ entonces existe $c \in [-2, 0]$ tal que $f(c) \geq 3$.

Indique la opción correcta:

(A) Todas las afirmaciones son falsas.
(B) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(C) I. es verdadera, II. y III. son falsas.
(D) I. y III. son verdaderas y II es falsa.
(E) I. es falsa, II. y III. son verdaderas.

4. Se considera $f(x) = \frac{\sqrt{x}-b}{x^2-1}$. Si $\lim_{x\to 1} f(x) = c \in \mathbb{R}$, entonces b y c son:

(A) $b = 1$, $c = 1$.
(B) $b = 1$, $c = 1/2$.
(C) $b = 1$, $c = 1/4$.
(D) Para todo b existe el límite y se cumple $b = c$.
(E) Ningún par b, c cumple lo pedido.

Ejercicios de desarrollo (Total: 20 puntos).

Recordatorio: está prohibido usar un lápiz para escribir el texto de la respuesta. Única excepción: se podrá usar el lápiz para trazar figuras. A la hora de corregir, sólo se tendrá en cuenta el texto escrito con tinta, y todo texto escrito con un lápiz será ignorado por el corrector.

Primer ejercicio de desarrollo (10 puntos).

Demostrar que:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 2$$

Segundo ejercicio de desarrollo (10 puntos).

Sea $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ tal que $x \leq 10$ para todo $x \in S$.

1. Justificar por qué existe $\alpha = \sup(S)$.
2. Demostrar que si $\alpha \notin S$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que $\alpha - \epsilon < x < \alpha$. Si utiliza un resultado visto en el teórico, demuéstrelo.
3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(\alpha) = 1$ y $f(x) = 1/2$ para todo $x \in S$. Probar que si $\alpha \notin S$, entonces f no es continua en α.