Examen Diciembre 2023 - Versión 1

viernes **15** de diciembre de 2023

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es de 100 puntos (10 puntos de VoF y 90 de MO).
- La duración del examen es de tres horas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- **Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros correspondientes.**

Respuestas de los ejercicios de Verdadero Falso. Total: 10 puntos

Puntajes: 2 puntos si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Llenar cada casilla con la respuesta **V o F** según corresponda.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5
F	V	F	F	V

Respuestas de los ejercicios de múltiple opción. Total: 90 puntos

Puntajes: 10 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E o F** según corresponda.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9
E	A	A	B	C	E	A	A	E

Notación:

En el examen se usa la siguiente notación:

- $E(x, r)$ denota el entorno real de centro x y radio r.
- $E^*(x, r)$ denota el entorno reducido real de centro x y radio r.
- $S^*(f, P)$ denota la suma superior de f con respecto a la partición P.

(Esta carilla está en blanco a propósito)

(I) Ejercicios de Verdadero Falso. Total: 10 puntos

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

Afirmación 1: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, entonces existe P partición de $[1, 2]$ tal que la suma superior $S^*(f_{|_{[1,2]}}, P) < 2$. Recordar que $f_{|_{[1,2]}}$ denota la restricción de f al intervalo $[1, 2]$.

Afirmación 2: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -2 = f(2)$, entonces $\forall \delta > 0 \;\; \exists x \in E^*(2, \delta)$ que cumple que $f(x) \notin E(f(2), \frac{1}{2})$.

Afirmación 3: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable en $[0, 5]$, entonces f es continua en $[0, 5]$.

Afirmación 4: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en $[a, b]$, entonces f es derivable en (a, b).

Afirmación 5: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} = 2$, entonces f es continua en el punto a.

(II) Ejercicios de múltiple opción. Total: 90 puntos

Ejercicio 1

Sea $A = [0, \sqrt{10}] \cap \mathbb{Q}$ y $B = A \setminus [-2, 2]$
Recordemos que la definición de $C \setminus D$ es $\{x : x \in C, \text{ tal que } x \notin D\}$

A) $\sup(A) = \sup(B)$, $\inf(A) = \inf(B)$, A no tiene máximo.
B) $\sup(A) = \sup(B)$, $\inf(A) = \inf(B)$, A tiene máximo.
C) $\sup(A) > \sup(B)$, $\inf(A) < \inf(B)$, A no tiene máximo.
D) $\sup(A) > \sup(B)$, $\inf(A) < \inf(B)$, A tiene máximo.
E) $\sup(A) = \sup(B)$, $\inf(A) < \inf(B)$, A no tiene máximo.
F) $\sup(A) = \sup(B)$, $\inf(A) < \inf(B)$, A tiene máximo.

Ejercicio 2

Consideremos una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple las tres condiciones siguientes:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$,
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$,
- $f(1) = 8$.

¿Qué podemos decir de la función f a partir de estos datos?

A) f tiene máximo absoluto y con la información dada no podemos determinar si tiene o no mínimo absoluto.
B) f tiene mínimo absoluto y con la información dada no podemos determinar si tiene o no máximo absoluto.
C) f tiene máximo y mínimo absolutos.
D) f tiene máximo absoluto y existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.
E) f tiene mínimo absoluto y existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.
F) Con la información dada no podemos determinar si f tiene extremos absolutos o si f tiene ceros.

Ejercicio 3

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log(x^2+1)e^{x^3-1}$. El valor de $f'(1)$ es:

A) $f'(1) = 1 + 3\log(2)$
B) $f'(1) = \frac{3}{2} + 2\log(2)$
C) $f'(1) = 2e\log(2)$
D) $f'(1) = 3e\log(2)$
E) $f'(1) = 1$
F) $f'(1) = 6\log(2)$

Ejercicio 4

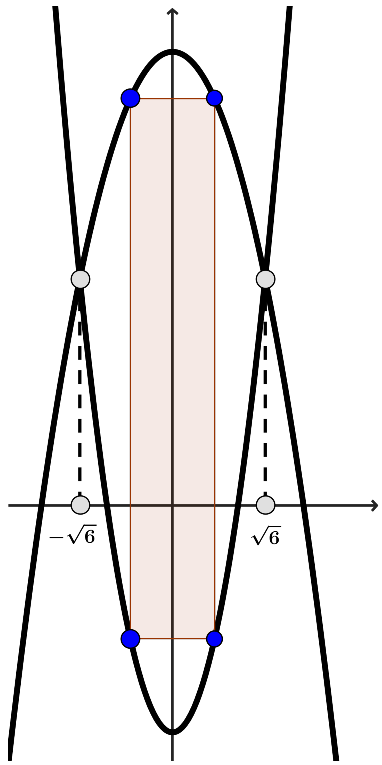
Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Indique la opción correcta:

A) f es creciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.
B) f no tiene máximo ni mínimo absolutos.
C) f es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$.
D) f es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.
E) f tiene máximo absoluto, pero no mínimo absoluto.
F) f tiene máximo y mínimo absoluto.

Ejercicio 5

Se consideran todos los rectángulos de lados paralelos a los ejes comprendidos entre los gráficos de las funciones:

$$f(x) = 12 - x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = -6 + 2x^2.$$



La mayor área para estos rectángulos es:

A) $36\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $24\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) 6 F) 9

Ejercicio 6

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \left(\sqrt{t^2 - t + 1} + 1\right) \mathrm{d}t$. Indicar el valor de $f'(1)$:

A) -1 B) 0 C) 1 D) 3 E) 4 F) 6

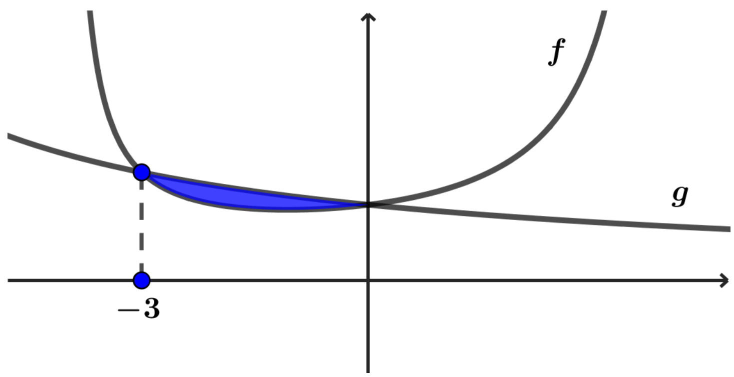
Ejercicio 7

Calcular
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{3x}\,dx.$$

A) $\frac{1}{10}(3e^{\frac{3\pi}{2}}+1)$
B) $\frac{1}{10}(3e^{-\frac{3\pi}{2}}-1)$
C) $\frac{1}{4}(3e^{\frac{3\pi}{2}}+1)$
D) $\frac{1}{4}(3e^{-\frac{3\pi}{2}}-1)$
E) $\frac{1}{10}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$
F) $\frac{1}{10}(e^{-\frac{\pi}{2}}-1)$

Ejercicio 8

En la figura se muestra la región encerrada entre los gráficos de las funciones:
$$f(x)=\frac{2x+16}{16-x^2} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\frac{10}{x+10}$$



Indicar el valor del área sombreada.

A) $2\log(4)-13\log(7)+10\log(10)$
B) $-2\log(4)-7\log(7)+10\log(10)$
C) $2\log(4)-9\log(7)+10\log(10)$
D) $2\log(4)+11\log(7)+10\log(10)$
E) $2\log(4)+13\log(7)-10\log(10)$
F) $2\log(4)+7\log(7)-10\log(10)$

Ejercicio 9

Indicar el valor del siguiente límite:
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-x-2+\cos(x)-\frac{x^3}{6}}{x^4}$$

A) $-\frac{1}{24}$ B) $-\frac{1}{12}$ C) 0 D) $\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{12}$ F) $+\infty$