Cálculo diferencial e integral en una variable.

Examen – Febrero de 2019

16 de febrero de 2019

N° Examen	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del examen es de 3 horas y media, no se permite usar calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

SÓLO PARA USO DOCENTE

1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	Total

Primer ejercicio (32 puntos).

1. Denotamos $[x]$ a la parte entera de x. Bosqueje el gráfico de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = [x + 1/2] - [x]$.

   A partir del gráfico de f determinar si existe el límite $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Determinar si existe y en caso de existencia calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$$

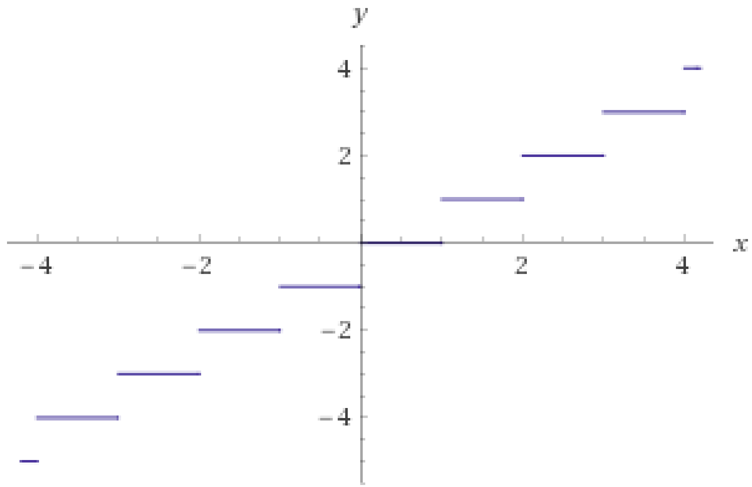
3. Calcular

   (a)
$$\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\, dx$$

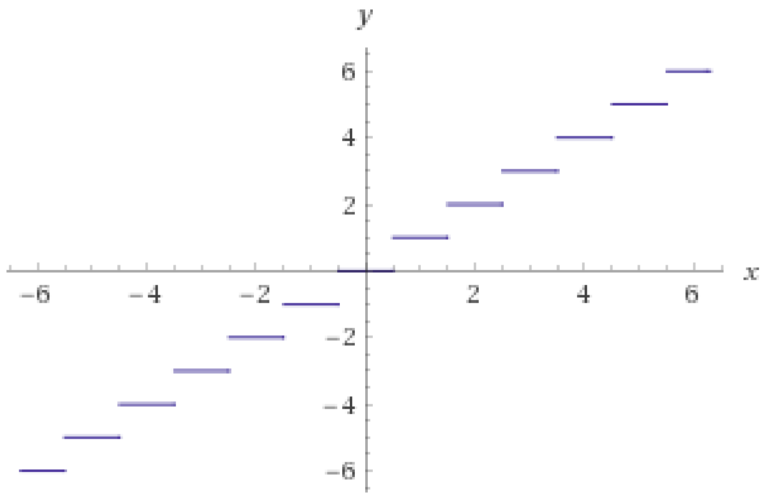
   (b)
$$\int_1^e \frac{\sin^3(1 + \log(x))}{x}\, dx$$

Resolución:

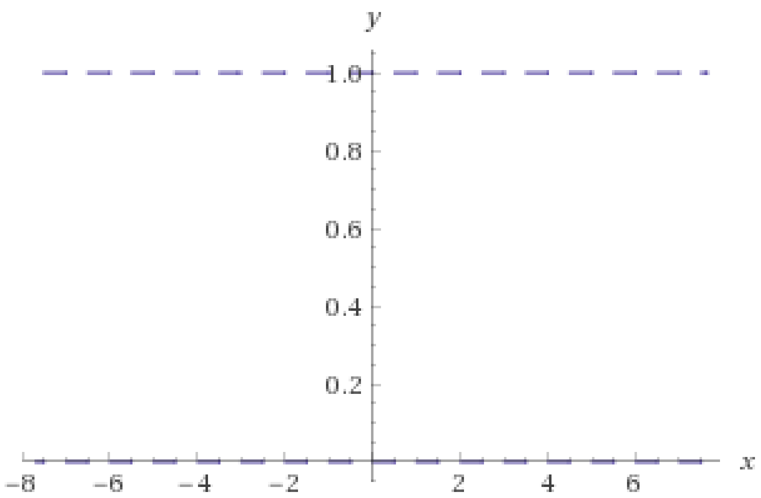
1. Sabemos que la función parte entera $[x]$ tiene la siguiente gráfica:



Por otro lado, sumarle $1/2$ al argumento de la función $[x]$ hace que la gráfica de $[x]$ se traslade $1/2$ unidades a la izquierda. Luego, la gráfica de $[x+1/2]$ es la siguiente:



Así, para graficar $f(x) = [x+1/2] - [x]$, lo que debemos hacer es restar a los valores de la segunda gráfica los correspondientes valores en la primera. Entonces, $f(x)$ posee la siguiente gráfica:



Vemos entones que el valor $f(x)$ alterna entre 0 y 1 para $x \to +\infty$. Por lo tanto, podemos concluir que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ no existe.

2. Lo primero que hacemos es manipular algebraicamente la función involucrada en el límite:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)}. \tag{1}$$

Cuando $x \to 0$, vemos que se presenta una indeterminación del tipo $0/0$. Para levantar esta indeterminación, consideramos el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = e^x$. Usando la *fórmula de Taylor con resto*, sabemos que para cualquier orden $n \in \mathbb{N}$ podemos escribir e^x de la siguiente manera:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x),$$

donde

$$\lim_{x \to 0} \frac{E_n(x)}{x^n} = 0.$$

Nótese que el polinomio de Taylor $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ de orden n está centrado en 0 porque el límite que aparece en el enunciado se calcula para x tendiendo a 0.

Ahora bien, como el numerador en (1) es $e^x - x - 1$, consideramos $n = 2$ en la fórmula de Taylor con resto para e^x. Así obtenemos:

$$e^x - x - 1 = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + E_2(x)\right) - x - 1 = \frac{x^2}{2} + E_2(x).$$

Por otro lado, como el denominador de (1) es $x(e^x - 1)$, consideramos $n = 1$ en la fórmula de Taylor con resto para e^x. Así obtenemos:

$$x(e^x - 1) = x(1 + x + E_1(x) - 1) = x(x + E_1(x)).$$

Entonces, tenemos la siguiente expresión para (1):

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \frac{\frac{x^2}{2} + E_2(x)}{x(x + E_1(x))} = \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{E_2(x)}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{E_1(x)}{x}\right)}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{E_2(x)}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{E_1(x)}{x}\right)}$$

Finalmente, recordemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{E_1(x)}{x} = 0 \text{ y } \lim_{x \to 0} \frac{E_2(x)}{x^2} = 0.$$

Por lo tanto, el límite del enunciado existe y vale:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{E_2(x)}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{E_1(x)}{x}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

3.

(a) Primero calculamos $\int \operatorname{sen}^3(x)dx$. En este caso, conviene usar la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

De donde $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. Así:

$$\operatorname{sen}^3(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}^2(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot (1 - \cos^2(x))$$
$$\operatorname{sen}^3(x) = \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^2(x).$$

Usando la linealidad de la integral, tenemos:

$$\int \operatorname{sen}^3(x)dx = \int (\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^2(x))dx$$
$$\int \operatorname{sen}^3(x)dx = \int \operatorname{sen}(x)dx - \int \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^2(x)dx,$$

donde

$$\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + K_1,$$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^2(x)dx &= -\int u^2 du \qquad \text{(haciendo } u = \cos(x)\text{)} \\ &= -\frac{u^3}{3} + K_2 \\ &= -\frac{\cos^3(x)}{3} + K_2.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int \operatorname{sen}^3(x)dx = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + K. \tag{2}$$

Por lo tanto (debido al *Teorema Fundamental del Cálculo*), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3(x)dx &= \left(-\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} \\
&= \left(-\cos(\pi/2) + \frac{\cos^3(\pi/2)}{3}\right) - \left(-\cos(0) + \frac{\cos^3(0)}{3}\right) \\
&= 0 - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Primero calculemos $\int \frac{\operatorname{sen}^3(1+\log(x))}{x}dx$. Hacemos el cambio de variable

$$u = 1 + \log(x).$$

Entonces,

$$du = \frac{1}{x}dx.$$

Luego,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3(1+\log(x))}{x}dx = \int \operatorname{sen}^3(u)du,$$

donde

$$\int \operatorname{sen}^3(u)du = -\cos(u) + \frac{\cos^3(u)}{3} + K$$

por (2). Deshaciendo el cambio de variable, tenemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3(1+\log(x))}{x}dx = -\cos(1+\log(x)) + \frac{\cos^3(1+\log(x))}{3} + K$$

Tenemos finalmente:

$$\begin{aligned}
\int_1^{e} \frac{\operatorname{sen}^3(1+\log(x))}{x}dx &= \left(-\cos(1+\log(x)) + \frac{\cos^3(1+\log(x))}{3}\right)\Bigg|_1^{e} \\
&= \left(-\cos(1+\log(e)) + \frac{\cos^3(1+\log(e))}{3}\right) \\
&\quad - \left(-\cos(1+\log(1)) + \frac{\cos^3(1+\log(1))}{3}\right) \\
&= \left(-\cos(2) + \frac{\cos^3(2)}{3}\right) - \left(-\cos(1) + \frac{\cos^3(1)}{3}\right) \\
&= \cos(1) - \cos(2) + \frac{\cos^3(2) - \cos^3(1)}{3}.
\end{aligned}$$

Segundo ejercicio (18 puntos).

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t < 1 \\ 2 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.

   Calcular de forma explícita la función $F : [0,2] \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

2. Probar que la función F es continua.

3. ¿La función F es derivable en el intervalo (0,2)? Justificar.

Resolución

1. Como f está definida por diferentes fórmulas en diferentes intervalos, pasamos a definir F según los mismos intervalos.

   Si $x < 1$,
   $$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x t\ dt = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

   Si $x \geq 1$,
   $$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = \int_0^1 f(t)\ dt + \int_1^x f(t)\ dt = \int_0^1 t\ dt + \int_1^x 2\ dt =$$
   $$= \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} + 2x - 2 = 2x - \frac{3}{2}.$$

2. La Proposición 106 del capítulo de límites y continuidad de las notas del curso, dice que siempre que se puede definir una función F de la forma $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, esta es continua.

   Como demostración alternativa, en vez de recurrir a este resultado teórico, podemos aprovechar que en la parte anterior obtuvimos una fórmula explícita para F. La misma está definida por un polinomio en cada intervalo, con lo cual es continua en los puntos interiores a dichos intervalos, y resta ver que los límites de ambos polinomios en $x_0 = 1$ son iguales a $\frac{1}{2}$ (como son polinomios, el límite es simplemente evaluar en $x = 1$).

3. Para que F sea derivable en el intervalo (0,2), tiene que ser derivable en todos sus puntos. Vamos a demostrar que F no es derivable en 1, con lo cual la respuesta a la pregunta es que no.

   Para eso veremos que no existe el límite del cociente incremental de F en 1, resolviendo sus límites laterales (esto es, las derivadas laterales de F).

   La derivada lateral izquierda de F es
   $$\lim_{x\to 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x-1} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} =$$
   $$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 1^-} (x+1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

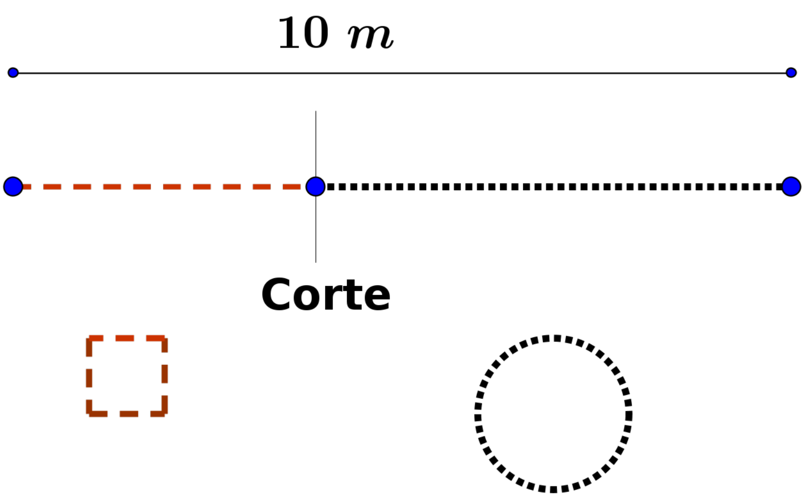
   La derivada lateral derecha de F es
   $$\lim_{x\to 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2.$$

Al ser distintas las derivadas laterales de F en 1, F no es derivable en 1, y por lo tanto F no es derivable en (0,2).

Tercer ejercicio (25 puntos).

Tenemos una cuerda de $10m$, la cual se corta en dos partes. Con la primera se construye un cuadrado y con la segunda un círculo.

1. ¿Cómo se debe dividir la cuerda para que la suma del área del cuadrado más la del círculo sea mínima?
2. ¿Cómo se debe dividir la cuerda para que la suma del área del cuadrado más la del círculo sea máxima?



Sugerencia: puede ser útil recordar que el área del círculo de radio r es πr^2, mientras que el perímetro es $2\pi r$.

Resolución:

Sea x el largo de la cuerda destinado al cuadrado, por lo que $10 - x$ es el largo de la cuerda destinado al círculo. El área total es $A = a^2 + \pi r^2$, donde a es el lado del cuadrado y r el radio del círculo. Así, es posible encontrar $a(x) = \frac{x}{4}$ a partir del perímetro del cuadrado. A su vez, $r(x) = \frac{10-x}{2\pi}$ a partir de la relación entre el perímetro del círculo y el largo de cuerda empleado para el mismo.

Se tiene entonces que

$$A : [0, 10] \to \mathbb{R} : A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{10-x}{2\pi}\right)^2 = x^2\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4\pi}\right) - x\frac{5}{\pi} + \frac{25}{\pi}$$

1. Viendo que $A(x)$ es una parábola de concavidad positiva, vemos que su mínimo se dará cuando $A'(x)$ se anule o en uno de los extremos.

$$A'(x) = x\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi}\right) - \frac{5}{\pi} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{40}{\pi + 4}$$

Como además $\frac{40}{\pi+4} \in (0, 10)$, se concluye entonces que para que el área total sea mínima, deben emplearse $\frac{40}{\pi+4}$m de cuerda para el cuadrado, y $10 - \frac{40}{\pi+4}$m para el círculo.

2. Como $A(x)$ es una parábola de concavidad positiva, su máximo se dará en uno de los extremos de $[0, 10]$.
$$A(0) = \frac{25}{\pi} > A(10) = \frac{25}{4}$$

Se concluye entonces que para que el área total sea máxima, deben emplearse los 10m de cuerda para el círculo.

Cuarto ejercicio (25 puntos).

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Probar que existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2. Sea I un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ derivable, tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Probar que f es constante.

3. Denotamos por $\arcsin : (-1, 1) \to (-\pi/2, \pi/2)$ a la inversa de la función seno restringida al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Recordar que $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Probar que $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \tan(\arcsin(x))$, es constante.

   Sugerencia: puede ser útil recordar que $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Resolución:

1. Ver teórico.

2. Supongamos por absurdo que f no es constante, entonces existirán $x_1 < x_2 \in I$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Como f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2), aplicando la parte anterior, existe c tal que $f'(c) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \neq 0$ lo cual es absurdo. En conclusión, f es constante en I.

3. En virtud del inciso anterior, alcanza con probar que $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} + \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} - \tan'(\arcsin(x)) \cdot \arcsin'(x) \\
&= \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} + \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{1}{\cos^2(\arcsin(x))} \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \\
&= \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} + \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} - \left(\frac{1}{1-\sin^2(\arcsin(x))} \right) \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \\
&= \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} + \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \\
&= \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} + \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} + \frac{x^2-1}{(1-x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} - \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = 0.
\end{aligned}$$