Cálculo diferencial e integral en una variable.

Examen – Julio de 2018

19 de julio de 2018

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del examen es de cuatro horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Sugerencia: tenga cuidado al pasar las respuestas.
Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 40 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C** o **D**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Correctas: 8 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 70 puntos)

Tres ejercicios de desarrollo se encuentran a partir de la página 4.

SÓLO PARA USO DOCENTE

MO	D1	D2.a	D2.b	D2.c	D3.a	D3.b	D3.c	Total

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 40 puntos)

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{si } x \leq 0 \\ \int_1^{ax+b} \frac{1}{t^{100}+1}\, dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Entonces la función f es derivable para los siguientes valores de a y b

A) $a = 2$ y $b = 1$

B) $a = 4$ y $b = 1$

C) $a = 4$ y $b = 0$

D) $a = 2$ y $b = 0$

2. Sean m y M el mínimo y máximo de la función $f(x) = \frac{x+2}{x^2+4}$ en el intervalo $[-2, 2]$. Entonces $M + m$ es igual a:

A) $\frac{\sqrt{2}}{4(2-\sqrt{2})}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4(2-\sqrt{2})}$

3. Se considera el conjunto $A = \{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 4(1 + \frac{k}{n})^3 : n \in \mathbb{N}\}$. Determinar el supremo de A. *Sugerencia:* Interpretar los elementos del conjunto A como la suma inferior $s(f, P)$ para f y P adecuados en el intervalo $[1, 2]$.

A) $\sup(A) = e$

B) $\sup(A) = 16$

C) $\sup(A) = 15$

D) $\sup(A) = \pi$

4. La igualdad

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x^4) - (a(x-1) + b(x-1)^2)}{(x-1)^2} = 0$$

se cumple para los siguientes valores de a y b

A) $a = 4$ y $b = -4$

B) $a = 1$ y $b = -1$

C) $a = 1$ y $b = -1/2$

D) $a = 4$ y $b = -2$

5. Sea $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = e^{x^3-3x^2}$

Sea I el intervalo maximal que contiene al 3, en el cual la función H es invertible y sea g la función inversa de H en I

A) $I = [2, +\infty)$ y $g'(1) = \frac{1}{9}$

B) $I = [2, +\infty)$ y $g'(1) = -\frac{1}{3e^2}$

C) $I = \mathbb{R}$ y $g'(1) = 1$

D) $I = \mathbb{R}$ y $g'(1) = -\frac{1}{e^2}$

Ejercicios de desarrollo (Total: 70 puntos).

Recordatorio: está prohibido usar un lápiz para escribir el texto de la respuesta. Única excepción: se podrá usar el lápiz para trazar figuras. A la hora de corregir, sólo se tendrá en cuenta el texto escrito con tinta, y todo texto escrito con un lápiz será ignorado por el corrector.

Primer ejercicio de desarrollo (10 puntos).

Calcular

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{\sin(x)} \cos(x) dx$$

Segundo ejercicio de desarrollo (30 puntos).

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Demostrar que f es continua en 0.

b) Demostrar que si $p \neq 0$, entonces f no es continua en p.

c) Demostrar que f no es integrable en el intervalo $[1, 2]$.

Tercer ejercicio de desarrollo (30 puntos).

a) Probar utilizando la fórmula de integración por partes que dado $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x)\ dx = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^{2n}(x)\ dx$$

b) Deducir de la parte anterior que:

$$(2n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x)\ dx = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\ dx$$

c) Demostrar que la fórmula

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx = \frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

es válida para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

Sugerencia: Puede ser útil la identidad

$$\frac{(2n+1)!}{n!^2(n+1)2^{2n+2}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2 2^{2n+3}}$$