Cálculo diferencial e integral en una variable

2do semestre de 2017

Examen – Febrero de 2018

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 36 puntos)

Ejercicio 1 Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\displaystyle\int_1^{e^{x^2}} f(t)\,dt = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Indique la opción correcta: ...

Solución: Como $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua, tiene una primitiva F, y por la regla de Barrow, sabemos que $\int_1^{e^{x^2}} f(t)\,dt = F\left(e^{x^2}\right) - F(1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que $F\left(e^{x^2}\right) - F(1) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Derivando la igualdad anterior (con la regla de la cadena), se deduce que $2xe^{x^2}F'(e^{x^2}) = 2x$, es decir: $e^{x^2}f(e^{x^2}) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (pues $F' = f$). Ahora, se observa que la función $x \mapsto e^{x^2}$ (que es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$) establece una biyección entre el intervalo $[0, +\infty)$ y su imagen $[1, +\infty)$. Entonces, para todo $t \in [1, +\infty)$, existe un (único) punto $x \in [0, +\infty)$ tal que $e^{x^2} = t$, lo que implica que $tf(t) = e^{x^2}f(e^{x^2}) = 1$, es decir: $f(t) = 1/t$. Falta entonces verificar que la igualdad se da en algún punto (es decir que la primitiva es la correcta). Tomando $x = 0$ tenemos que $\int_1^{e^0} f(t) = 0^2$. Por lo tanto, la opción correcta es: $\boxed{f(t) = 1/t \text{ para todo } t \in [1, +\infty)}$

Ejercicio 2 La integral $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\,dx$ vale: ...

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{x}_{f'}\,\underbrace{\arctan(x)}_{g}\,dx &= \frac{1}{2}\big[x^2\arctan(x)\big]_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx \quad \text{(integración por partes)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\big[x - \arctan(x)\big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Entonces, la opción correcta es: $\boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$

Ejercicio 3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, y $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto (con $a < b$). Se consideran los conjuntos $I, J \subset \mathbb{R}$ definidos por:

$$\begin{aligned}
I &= \{y \in \mathbb{R} \,:\, \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y\} && \text{(Imagen de } \mathbb{R} \text{ por la función } f) \\
J &= \{y \in \mathbb{R} \,:\, \exists x \in (a, b),\ f(x) = y\} && \text{(Imagen del intervalo } (a, b) \text{ por } f)
\end{aligned}$$

Indique la opción correcta: ...

Solución: Como la función f es continua en $\mathbb{R}$, es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, y tiene mínimo y máximo en dicho intervalo (por el teorema de Weierstrass). Por lo tanto, tenemos que $f([a,b]) = [m,M]$ para algunos $m,M \in \mathbb{R}$. Además, se observa que $J = f((a,b)) \subseteq f([a,b]) = [m,M]$, lo que implica que J está acotado. Y como J no es vacío (pues $f((a+b)/2) \in J$), tiene ínfimo y supremo (por completitud). Por otro lado, no tiene necesariamente mínimo y máximo. Para verificarlo, basta con tomar la función identidad $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y observar que $J = f((0,1)) = (0,1)$ no tiene ni mínimo ni máximo. Entonces, la solución correcta es:

$\boxed{\text{El conjunto } J \text{ tiene ínfimo y supremo, pero no tiene necesariamente mínimo y máximo}}$

Ejercicio 4 La igualdad $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(e^x - 1) - (ax + bx^2 + cx^3)}{x^3} = 0$
se cumple para los siguientes valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$: ...

Solución: Sean $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) \;=\; \operatorname{sen}(e^x - 1) - (ax + bx^2 + cx^3) \qquad \text{y} \qquad g(x) \;=\; x^3$$

Ambas funciones son infinitamente derivables en $\mathbb{R}$, y sus primeras tres derivadas son

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x\cos(e^x - 1) - (a + 2bx + 3cx^2) & g'(x) &= 3x^2\\
f''(x) &= e^x\cos(e^x - 1) - e^{2x}\operatorname{sen}(e^x - 1) - (2b + 6cx) & g''(x) &= 6x\\
f'''(x) &= e^x\cos(e^x - 1) - 3e^{2x}\operatorname{sen}(e^x - 1) - e^{3x}\cos(e^x - 1) - 6c & g'''(x) &= 6
\end{aligned}$$

Queremos determinar los valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; 0.$

Estudio del límite de f/g en 0 Tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ ("0/0")

Por la regla de l'Hôpital, tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (cuando éste existe).

Por lo tanto, tenemos que determinar los valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \;=\; 0.$

Estudio del límite de f'/g' en 0 Tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = 1 - a$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0} g'(x) = 0.$

Si tuviéramos que $a - 1 \neq 0$, tendríamos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$: absurdo.

Entonces tenemos que $a - 1 = 0$, es decir: $a = 1$. En este caso, el límite de f'/g' en 0 nos lleva de nuevo a una indeterminación de tipo "0/0". Por la regla de l'Hôpital, tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ (cuando éste existe).

Por lo tanto, tenemos que determinar los valores de $b,c \in \mathbb{R}$ tales que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \;=\; 0.$

Estudio del límite de f''/g'' en 0 Tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f''(x) = 1 - 2b$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0} g''(x) = 0.$

Si tuviéramos que $1 - 2b \neq 0$, tendríamos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \pm\infty$: absurdo.

Entonces, tenemos que $1 - 2b = 0$, es decir: $b = \frac{1}{2}$. En este caso, el límite de f''/g'' en 0 nos lleva de nuevo a una indeterminación de tipo "0/0". Por la regla de l'Hôpital, tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)}$ (cuando éste existe).

Por lo tanto, tenemos que determinar los valores de $c \in \mathbb{R}$ tales que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} \;=\; 0.$

Estudio del límite de f'''/g''' en 0 Ahora, se observa que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f'''(x)}{g'''(x)} = \dfrac{-6c}{6} = -c.$

Para que este límite sea nulo, se necesita tomar $c = 0$.

Por lo tanto, la opción correcta era $\boxed{a = 1,\ b = \frac{1}{2},\ c = 0}$

Ejercicio 5 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(-x)}{x} = a$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Indique la opción correcta: ...

Solución: Cuando la función f es derivable en 0, se observa que

$$\begin{aligned} 2f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{f(-x) - f(0)}{-x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} + \frac{f(-x) - f(0)}{-x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = a \end{aligned}$$

lo que implica que $2f'(0) = a$. Por otro lado, la función f puede ser no derivable en 0. En efecto, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| + \frac{1}{2}ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$ no es derivable en 0. Sin embargo, cumple la condición deseada:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x| + \frac{1}{2}ax - (|-x| + \frac{1}{2}a(-x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{x} = a$$

Por lo tanto, la opción correcta es:

$\boxed{\text{La función } f \text{ puede ser no derivable en 0, pero cuando lo es, tenemos que } 2f'(0) = a}$

Ejercicio 6 Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, se escriben:

- $S_*(f, P)$ y $S^*(f, P)$ las sumas inferior y superior de f respecto a una partición $P \subset [a, b]$;
- $I_*(f)$ e $I^*(f)$ las integrales inferior y superior de f.

Se consideran las siguientes afirmaciones:

I. $I_*(f) \le S_*(f, P) \le S^*(f, P) \le I^*(f)$ para toda partición $P \subset [a, b]$.

II. Si $I_*(f) = S_*(f, P)$ e $I^*(f) = S^*(f, P)$ para alguna partición P, entonces f es integrable.

III. Si $S_*(f, P) = S^*(f, P)$ para alguna partición P, entonces f es integrable.

Indique la opción correcta: ...

Solución: *Afirmación I*: En el curso sobre las integrales, vimos que

$$S_*(f, P) \le I_*(f) \le I^*(f) \le S^*(f, P) \tag{$*$}$$

para toda partición $P \subset [a, b]$. En general, las dos desigualdades extremas son estrictas (es decir: $S_*(f, P) < I_*(f)$ e $I^*(f) < S^*(f, P)$), lo que implica que la afirmación I es falsa.

Afirmación II: Consideremos la función de Dirichlet $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Se verifica fácilmente que:

- $S_*(f, P) = 0$ para toda partición P, entonces $I_*(f) = \sup_{P\subset[a,b]} S_*(f, P) = 0$.
- $S^*(f, P) = b - a$ para toda partición P, entonces $I^*(f) = \inf_{P\subset[a,b]} S^*(f, P) = b - a$.

En particular, tenemos que $S_*(f,P) = I_*(f)$ y $S^*(f,P) = I^*(f)$ para cualquier partición P. Sin embargo, la función de Dirichlet no es integrable. Por lo tanto, la afirmación II es falsa.

Afirmación III: Si existe una partición $P \subset [a,b]$ tal que $S_*(f,P) = S^*(f,P)$, se deduce que $S_*(f,P) = I_*(f) = I^*(f) = S^*(f,P)$ por $(*)$. En particular, tenemos que $I_*(f) = I^*(f)$, lo que significa que f es integrable. Por lo tanto, la afirmación III es verdadera.

En conclusión, la opción correcta es: $\boxed{\text{III es verdadera; I y II son falsas}}$

Ejercicios de desarrollo (Total: 64 puntos)

Primer ejercicio de desarrollo (32 puntos)

1. Completar la siguiente definición: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua (en $\mathbb{R}$) si y sólo si ...
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, monótona creciente y biyectiva. Demostrar que la función inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona creciente y continua.
3. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}(x)$.
   (a) Demostrar que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
   (b) Estudiar los límites de la función f en $-\infty$ y $+\infty$, y deducir que dicha función establece una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
   (c) Deducir que la función $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona creciente y continua.

Solución: 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua (en $\mathbb{R}$) si y sólo si $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Como f es monótona creciente e inyectiva, f es estrictamente creciente, es decir: $x < x'$ implica $f(x) < f(x')$ para todos $x, x' \in \mathbb{R}$. Ahora, queremos demostrar que $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona creciente. Sean $x, x' \in \mathbb{R}$ tales que $x \leq x'$. Si tuviéramos que $f^{-1}(x) > f^{-1}(x')$, tendríamos que $f(f^{-1}(x)) > f(f^{-1}(x'))$ (pues f es estrictamente creciente), es decir $x > x'$ (pues $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x')) = x'$), lo que sería absurdo. Por lo tanto, tenemos que $f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x')$, lo que demuestra que f^{-1} es monótona creciente. (Además, como f^{-1} es inyectiva, es estrictamente creciente.)

Ahora, se trata de demostrar que f^{-1} es continua en $\mathbb{R}$. Para ello, se fijan $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, y se escribe $y_0 = f^{-1}(x_0)$. (Por construcción, tenemos que $f(y_0) = x_0$.) Queremos hallar un radio $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < \delta$, tengamos que $|f^{-1}(x) - y_0| < \varepsilon$. Para ello, se observa que $f(y_0 - \varepsilon) < x_0\ (= f(y_0)) < f(y_0 + \varepsilon)$ (pues f es estrictamente creciente), lo que nos permite tomar

$$\delta \ := \ \min\bigl(x_0 - f(y_0 - \varepsilon),\ f(y_0 + \varepsilon) - x_0\bigr) \ > 0\,.$$

Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < \delta$, es decir: tal que $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Se observa que

- $x > x_0 - \delta \geq x_0 - (x_0 - f(y_0 - \varepsilon)) = f(y_0 - \varepsilon)$, pues $\delta \leq x_0 - f(y_0 - \varepsilon)$,
- $x < x_0 + \delta \leq x_0 + (f(y_0 + \varepsilon) - x_0) = f(y_0 + \varepsilon)$, pues $\delta \leq f(y_0 + \varepsilon) - x_0$,

Entonces, tenemos que $f(y_0 - \varepsilon) < x < f(y_0 + \varepsilon)$, luego:

$$y_0 - \varepsilon \ = \ f^{-1}(f(y_0 - \varepsilon)) \ < \ f^{-1}(x) \ < \ f^{-1}(f(y_0 + \varepsilon)) \ = \ y_0 + \varepsilon$$

(pues f^{-1} es estrictamente creciente), es decir: $|f^{-1}(x) - y_0| < \varepsilon$. Esto demuestra que la función f^{-1} es continua en un punto x_0 cualquiera.

3. **(a)** La función f es derivable en $\mathbb{R}$, y su derivada es $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $\cos(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se deduce que $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\cos(x) \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la función f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

(b) Tenemos que $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, mientras la función $x \mapsto \frac{2}{3}\cos(x)$ está acotada; entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Similarmente, tenemos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Por lo tanto, la imagen de la función f (que es continua) es el intervalo $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, lo que significa que f es sobreyectiva. Y como ya vimos en **(a)** que f es estrictamente creciente, f también es inyectiva. Entonces la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es biyectiva.

(c) Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona creciente (por **(a)**) y biyectiva (por **(b)**), se deduce que su inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona creciente y continua (por **2.**)

Segundo ejercicio de desarrollo (32 puntos)

En este ejercicio, se recuerda que el perímetro de un círculo de radio r es $2\pi r$, y que el volumen de un cilindro es el producto del área de su base por su altura.

1. Demostrar que el área de un círculo de radio r es πr^2.

Se desea construir un envase cilíndrico (Fig. 1) a partir de una lámina rectangular (de lados L_1 y L_2) de hojalata, de forma que su capacidad sea la mayor posible dentro de ciertos parámetros. Para ello, se divide la lámina en dos partes:

- una banda vertical de ancho $2r$, en la cual se cortan las tapas inferior y superior del envase, en forma de dos discos de radio r;
- el resto de la lámina, en la cual se corta la cara lateral del envase, en forma de un subrectángulo del cual una de las dos dimensiones (horizontal o vertical) es igual a $2\pi r$ y la otra es máxima.

Así se obtienen dos patrones posibles, indicados en las Fig. 2 y 3:

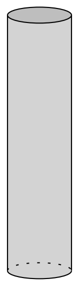

Fig. 1

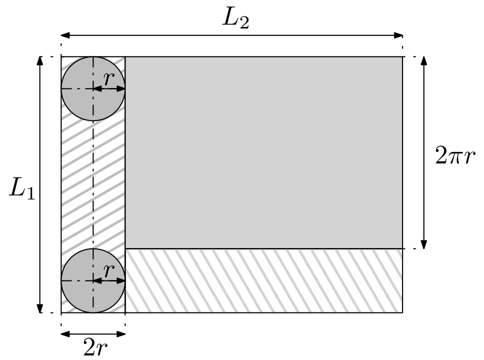

Fig. 2

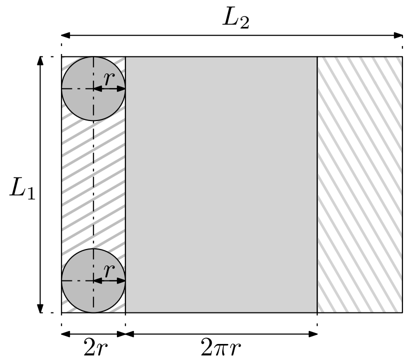

Fig. 3

En lo siguiente, se toman $L_1 = 20\pi$ ($\approx 62,83$) y $L_2 = 80$.

2. (a) Determinar los valores de r para los cuales el procedimiento de construcción dado por el patrón de la Fig. 2 tiene sentido.
   (b) Determinar la función f que a cada valor de r asocia el volumen $f(r)$ del cilindro de radio r construido con el patrón de la Fig. 2.
   (c) Determinar el radio r que maximiza el volumen $f(r)$ del cilindro construido con el patrón de la Fig. 2., así como el volumen correspondiente.
3. Mismas preguntas (a), (b) y (c) para el patrón de la Fig. 3, escribiendo g la función de volumen correspondiente.
4. ¿Cuál de los dos procedimientos da el mayor volumen? Justificar la respuesta.

Solución: 1. El área A_r de un círculo de radio $r > 0$ es el doble del área de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ (en el intervalo $[-r, r]$), que describe la media circunferencia superior de dicho círculo. Así tenemos que:

$$\begin{aligned}
A_r &= 2\int_{-r}^{+r}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)dx \;=\; 2\int_{-1}^{+1}\left(\sqrt{r^2 - r^2u^2}\right)r\,du && \text{(cambio de var. } x := ru\text{)}\\
&= 2r^2\int_{-1}^{+1}\left(\sqrt{1-u^2}\right)du \;=\; 2r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\right)\cos t\,dt && \text{(cambio de var. } u := \operatorname{sen} t\text{)}\\
&= 2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt \;=\; 2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2t + 1}{2}\,dt \;=\; r^2\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + t\right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=+\frac{\pi}{2}} \;=\; \pi r^2\,.
\end{aligned}$$

2. (a) Es obvio que $r > 0$. Las otras restricciones impuestas por la Fig. 2 son:

- $2r \leq L_2 = 80$ (restricción horizontal), es decir: $r \leq 80/2 = 40$;
- $4r \leq L_1 = 20\pi$ (restricción vertical en la parte izquierda), es decir: $r \leq 20\pi/4 = 5\pi$;
- $2\pi r \leq L_1 = 20\pi$ (restricción vertical en la parte derecha), es decir: $r \leq 20\pi/2\pi = 10$.

Por lo tanto, tenemos que $r \in (0, \text{mín}(40, 5\pi, 10)] = (0, 10]$.

(b) El volumen asociado al radio r es:

$$f(r) \;=\; \pi r^2 \times (L_2 - 2r) \;=\; \pi r^2 \times (80 - 2r) \;=\; -2\pi r^3 + 80\pi r^2\,.$$

(c) Para maximizar el volumen $f(r)$, se observa que la función (polinomial) f es derivable en $\mathbb{R}$, y que su derivada es dada por $f'(r) = -6\pi r^2 + 160r$. La función f' tiene dos raíces 0 y $\frac{80}{3}$ ($\approx 26,67$), lo que nos da la siguiente tabla de variación para la función f en $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & 0 & & \frac{80}{3} & \\ \hline f' & - & 0 & + & 0 & - \\ \hline f & \searrow & & \nearrow & & \searrow \end{array}$$

En el intervalo $(0, 10]$, se observa que la función f es estrictamente creciente, de tal modo que alcanza su máximo absoluto para $r_2 = 10$, con el valor

$$V_{\text{máx}}(\text{Fig.2}) \;=\; f(r_2) \;=\; f(10) \;=\; -2000\pi + 8000\pi \;=\; 6000\pi \quad (\approx\; 18849,56)\,.$$

3. (a) Es obvio que $r > 0$. Las otras restricciones impuestas por la Fig. 3 son:

- $2r + 2\pi r \leq L_2 = 80$ (restricción horizontal), es decir: $r \leq \frac{80}{2\pi+2} = \frac{40}{\pi+1}$ ($\approx 9,66$);
- $4r \leq L_1 = 20\pi$ (restricción vertical), es decir: $r \leq 20\pi/4 = 5\pi$ ($\approx 15,71$).

Por lo tanto, tenemos que $r \in \big(0, \text{mín}(\frac{40}{\pi+1}, 5\pi)\big] = \big(0, \frac{40}{\pi+1}\big]$.

(b) El volumen asociado al radio r es: $\;g(r) \;=\; \pi r^2 \times L_1 \;=\; 20\pi^2 r^2$.

(c) De modo obvio, la función g es estrictamente creciente en el intervalo $\big(0, \frac{40}{\pi+1}\big]$. Por lo tanto, alcanza su máximo absoluto para $r_3 = \frac{40}{\pi+1}$, con el valor

$$V_{\text{máx}}(\text{Fig.3}) \;=\; g(r_3) \;=\; g\Big(\frac{40}{\pi+1}\Big) \;=\; \frac{32000\pi^2}{(\pi+1)^2} \quad (\approx 18412,59)\,.$$

4. El volumen máximo obtenido con el patrón de la Fig. 2 es sensiblemente mayor que el volumen máximo obtenido con el patrón de la Fig. 3. (Para comparar ambos volúmenes sin calculadora, se puede tomar $\pi \approx 22/7 \approx 3,14$ o cualquier aproximación similar.)

Solución alternativa, propuesta por un estudiante: Remplazando la constante π por una variable $x > 0$ en los dos volúmenes anteriores, se trata de determinar el signo de la expresión

$$h(x) \;=\; 6000x - \frac{32000x^2}{(x+1)^2} \;=\; \frac{6000x(x+1)^2 - 32000x^2}{(x+1)^2} \;=\; \frac{6000x^3 - 20000x^2 + 6000x}{(x+1)^2}$$

que también es el signo del polinomio $p(x) = 3x^2 - 10x + 3$ (eliminando el denominador > 0, y simplificando el numerador por $2000x > 0$). Se observa que el polinomio $p(x)$ tiene raíces $\frac{1}{3}$ y 3, y que es estrictamente creciente en el intervalo $[3, +\infty)$. Como $\pi > 3$, se deduce que $p(\pi) > p(3) = 0$, lo que implica que $V_{\text{máx}}(\text{Fig.2}) - V_{\text{máx}}(\text{Fig.3}) = h(\pi) > 0$.