Cálculo diferencial e integral en una variable

2do semestre de 2017

Examen – Febrero de 2018

17 de febrero de 2018

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del examen es de cuatro horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Sugerencia: tenga cuidado al pasar las respuestas.
Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 36 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Correctas: 6 puntos. Incorrectas: -1,5 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 64 puntos)

Dos ejercicios de desarrollo se encuentran en las hojas 3 y 4.

SÓLO PARA USO DOCENTE

D1.1	D1.2	D1.3	D2.1	D2.2	D2.3	D2.4

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 36 puntos)

1. Sea $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funcion continua tal que $\displaystyle\int_1^{e^{x^2}} f(t)\,dt = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Indique la opción correcta:

(A) $f(t) = 0$ para todo $t \in [1,+\infty)$
(B) $f(t) = 1/t$ para todo $t \in [1,+\infty)$
(C) $f(t) = 1/e^{t^2}$ para todo $t \in [1,+\infty)$
(D) $f(e^{t^2}) = 2t$ para todo $t \in [1,+\infty)$
(E) No existe f que cumpla estas condiciones

2. La integral $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\,dx$ vale:

(A) 0
(B) $\frac{\pi}{4} - \frac{\log(4)}{4}$
(C) $1 - \frac{\pi}{4}$
(D) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
(E) La función $x\arctan(x)$ no es integrable

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, y $(a,b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto (con $a < b$). Se consideran los conjuntos $I, J \subset \mathbb{R}$ definidos por:

$$I = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y\} \qquad \text{(Imagen de } \mathbb{R} \text{ por la función } f)$$
$$J = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in (a,b),\ f(x) = y\} \qquad \text{(Imagen del intervalo } (a,b) \text{ por } f)$$

Indique la opción correcta

(A) Si I tiene mínimo, entonces J también tiene mínimo
(B) Si I tiene mínimo y máximo, entonces $I = J$
(C) El conjunto J puede estar no acotado
(D) El conjunto J tiene mínimo y máximo
(E) El conjunto J tiene ínfimo y supremo, pero no tiene necesariamente mínimo y máximo

4. La igualdad $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(e^x - 1) - (ax + bx^2 + cx^3)}{x^3} = 0$
se cumple para los siguientes valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$:

(A) $a = 1,\ b = 0,\ c = -\frac{1}{6}$
(B) $a = 1,\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{6}$
(C) $a = 1,\ b = \frac{1}{2},\ c = 0$
(D) $a = 1,\ b = 0,\ c = 0$
(E) $a = 1,\ b = 1,\ c = 0$

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = a$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Indique la opción correcta:

(A) La función f puede ser no derivable en 0, pero cuando lo es, tenemos que $f'(0) = 2a$.
(B) La función f puede ser no derivable en 0, pero cuando lo es, tenemos que $a = 2f'(0)$.
(C) La función f es derivable en 0 y $f'(0) = 2a$.
(D) La función f es derivable en 0 y $2f'(0) = a$.
(E) La función f es derivable en 0 y $f'(0) = a = 0$.

6. Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, se escriben:

- $S_*(f, P)$ y $S^*(f, P)$ las sumas inferior y superior de f respecto a una partición $P \subset [a, b]$;
- $I_*(f)$ e $I^*(f)$ las integrales inferior y superior de f.

Se consideran las siguientes afirmaciones:

I. $I_*(f) \le S_*(f, P) \le S^*(f, P) \le I^*(f)$ para toda partición $P \subset [a, b]$.
II. Si $I_*(f) = S_*(f, P)$ e $I^*(f) = S^*(f, P)$ para alguna partición P, entonces f es integrable.
III. Si $S_*(f, P) = S^*(f, P)$ para alguna partición P, entonces f es integrable.

Indique la opción correcta:

(A) I y II. son verdaderas; III es falsa
(B) I y III son verdaderas; II es falsa
(C) II es verdadera; I y III son falsas
(D) III es verdadera; I y II son falsas
(E) Las tres afirmaciones son falsas

Ejercicios de desarrollo (Total: 64 puntos)

Recordatorio: está prohibido usar un lápiz para escribir el texto de la respuesta. Única excepción: se podrá usar el lápiz para trazar figuras. A la hora de corregir, sólo se tendrá en cuenta el texto escrito con lapicera, y todo texto escrito con un lápiz será ignorado por el corrector.

Los razonamientos deberán estar correctamente fundamentados en la teoría desarrollada en el curso, enunciando los teoremas usados y justificando su aplicación.

Primer ejercicio de desarrollo (32 puntos)

1. Completar la siguiente definición: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua (en $\mathbb{R}$) si y sólo si ...
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, monótona creciente y biyectiva. Demostrar que la función inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona creciente y continua.
3. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}(x)$.
   (a) Demostrar que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
   (b) Estudiar los límites de la función f en $-\infty$ y $+\infty$, y deducir que dicha función establece una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
   (c) Deducir que la función $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona creciente y continua.

Segundo ejercicio de desarrollo (32 puntos)

En este ejercicio, se recuerda que el perímetro de un círculo de radio r es $2\pi r$, y que el volumen de un cilindro es el producto del área de su base por su altura.

1. Demostrar que el área de un círculo de radio r es πr^2.

Se desea construir un envase cilíndrico (Fig. 1) a partir de una lámina rectangular (de lados L_1 y L_2) de hojalata, de forma que su capacidad sea la mayor posible dentro de ciertos parámetros. Para ello, se divide la lámina en dos partes:

- una banda vertical de ancho $2r$, en la cual se cortan las tapas inferior y superior del envase, en forma de dos discos de radio r;
- el resto de la lámina, en la cual se corta la cara lateral del envase, en forma de un subrectangulo del cual una de las dos dimensiones (horizontal o vertical) es igual a $2\pi r$ y la otra es maximal.

Así se obtienen dos patrones posibles, indicados en las Fig. 2 y 3:

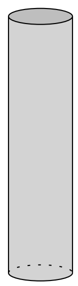

Fig. 1

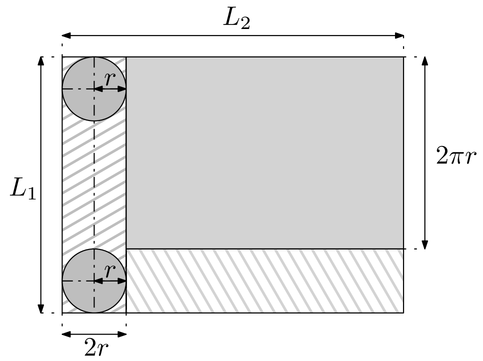

Fig. 2

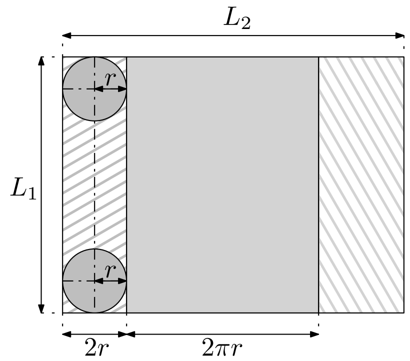

Fig. 3

En lo siguiente, se toman $L_1 = 20\pi$ ($\approx 62,83$) y $L_2 = 80$.

2. (a) Determinar los valores de r para los cuales el procedimiento de construcción dado por el patrón de la Fig. 2 tiene sentido.
   (b) Determinar la función f que a cada valor de r asocia el volumen $f(r)$ del cilindro de radio r construido con el patrón de la Fig. 2.
   (c) Determinar el radio r que maximiza el volumen $f(r)$ del cilindro construido con el patrón de la Fig. 2., así como el volumen correspondiente.
3. Mismas preguntas (a), (b) y (c) para el patrón de la Fig. 3, escribiendo g la función de volumen correspondiente.
4. ¿Cuál de los dos procedimientos da el mayor volumen? Justificar la respuesta.