Cálculo diferencial e integral en una variable

2do semestre de 2017

Examen – Diciembre de 2017

19 de diciembre de 2017

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del examen es de cuatro horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Sugerencia: tenga cuidado al pasar las respuestas.
Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 30 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Correctas: 6 puntos. Incorrectas: -1,5 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 70 puntos)

Tres ejercicios de desarrollo se encuentran en la hoja 3.

SÓLO PARA USO DOCENTE

D1	D2.1	D2.2	D2.3	D3.1	D3.2	D3.3	Total

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 30 puntos)

1. Sea un conjunto A tal que $\mathbb{N} \subset A \subset [0, +\infty)$.
(A) A tiene supremo e ínfimo, pero no tiene mínimo
(B) A tiene supremo y mínimo
(C) A tiene mínimo, pero no tiene supremo
(D) A tiene ínfimo, pero no tiene ni mínimo ni supremo
(E) A no tiene ni ínfimo ni supremo

Observación: Se recuerda que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual a x. La integral $\int_2^6 f(x)\, dx$ vale
(A) $(2/3)(6^{3/2} - 2^{3/2})$
(B) $\lfloor (2/3)6^{3/2} \rfloor - \lfloor (2/3)2^{3/2} \rfloor$
(C) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$
(D) 6
(E) La función f no es integrable.

3. La igualdad $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\log(\operatorname{sen}(x) + 1) - (ax + bx^2 + cx^3)}{x^3} \right) = 0$
se cumple para los siguientes valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$:
(A) $a = 1,\ b = 0,\ c = 0$
(B) $a = 1,\ b = 0,\ c = -\frac{1}{6}$
(C) $a = 1,\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{6}$
(D) $a = 1,\ b = -1,\ c = 1$
(E) No hay tales valores

4. Sea $f : [0, 2] \to [0, 2]$ una función continua tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 2$.
Se consideran las siguientes afirmaciones:
I. La función f es sobreyectiva.
II. La función f es inyectiva.
III. Necesariamente existe al menos un punto $x \in (0, 2)$ tal que $f(x) = x$.

Indique la opción correcta:
(A) I y II son verdaderas, III es falsa
(B) I es verdadera, II y III son falsas
(C) Las tres afirmaciones son verdaderas
(D) Las tres afirmaciones son falsas
(E) III es verdadera, I y II son falsas

5. El valor de la integral $\displaystyle\int_1^e \frac{4\log(x) + 3}{x(2\log(x) + 1)} dx$ es:
(A) 2
(B) $2 + \log 3$
(C) $2 - \log 3$
(D) $2 + \frac{1}{2}\log 3$
(E) $\log 3 - \log 2$

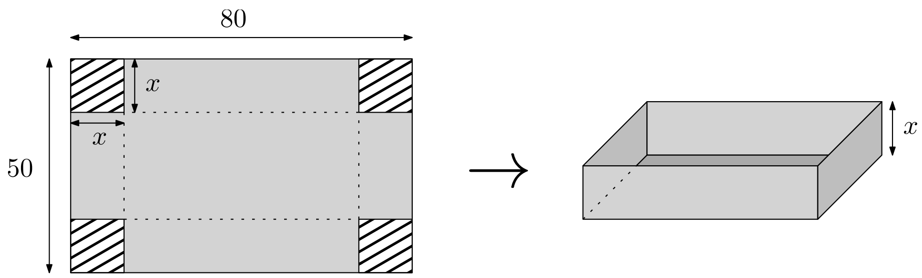
Ejercicios de desarrollo (Total: 70 puntos)

Recordatorio: está prohibido usar un lápiz para escribir el texto de la respuesta. Única excepción: se podrá usar el lápiz para trazar figuras. A la hora de corregir, sólo se tendrá en cuenta el texto escrito con lapicera, y todo texto escrito con un lápiz será ignorado por el corrector.

Los razonamientos deberán estar correctamente fundamentados en la teoría desarrollada en el curso, enunciando los teoremas usados y justificando su aplicación.

Primer ejercicio de desarrollo (15 puntos)

Se desea construir una caja abierta a partir de un rectángulo de cartón de $80\,\text{cm} \times 50\,\text{cm}$, quitando cuadrados iguales de lado x en cada esquina como lo indicado en la siguiente figura:



Determinar el valor de x que maximiza el volumen de la caja obtenida. Se deben justificar todas las etapas del razonamiento que permite llegar al resultado.

Segundo ejercicio de desarrollo (30 puntos)

1. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Completar la definición:
   f es continua en un punto $x_0 \in I$ si y sólo si ...

Sea un número $k > 0$. Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es k-lipschitziana cuando para todos $x, x' \in I$, tenemos que $|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$.

2. Demostrar que si $f : I \to \mathbb{R}$ es k-lipschitziana, entonces f es continua en I.
3. Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es k-lipschitziana para algún $k > 0$.

Tercer ejercicio de desarrollo (25 puntos)

Se recuerda que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

1. Demostrar el teorema de integración por partes:
   Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son dos funciones derivables y con derivadas f' y g' continuas, entonces:
   $$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx \;=\; f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \qquad (\text{para todos } a, b \in \mathbb{R})$$
2. Sea $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Demostrar que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Sea $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Se recuerda que $0! = 1! = 1$.)
   Demostrar por inducción completa que $I_n = (-1)^n n!(es_n - 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.