Comunicaciones Digitales
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

23 de Julio de 2022

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 2 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentaciñn de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Se pueden utilizar resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Acaba de obtener un nuevo trabajo como ingeniero asistente en la operadora celular local más importante. En estos momentos uno de los negocios con mayor crecimiento es el de internet de las cosas, por lo que su primera tarea es evaluar las distintas tecnologías disponibles, en particular Narrowband IoT. Justamente Narrowband IoT es una tecnología que se usa en despliegues de operadores celulares, y usa las bandas licenciadas por éstos, típicamente alrededor de los 1800 u 800 MHz. Cada canal ocupa 180 kHz y la potencia de la señal transmitida es de 20 dBm. Sus primeras lecturas sobre el tema lo llevan a concluir que la modulación es QPSK.

(a) Realice un diagrama completo del par transmisor-receptor.

(b) ¿Cuál es la máxima tasa de bits de datos que alcanza este sistema? Suponga un código corrector de errores con tasa $1/3$. ¿Qué bloque del diagrama de la parte anterior termina siendo determinante en esta respuesta? ¿Porqué diseñaría un sistema con una capacidad menor a la máxima alcanzable?

Lo siguiente que intentará responder es qué alcance tiene el sistema. Para esto, usará el clásico modelo de Okumura-Hata para ciudades que dice que la atenuación (en dB) es aproximadamente:

$$L(d, f) = 46.32 + 26.07 \log_{10} f + 33.77 \log_{10} d \tag{1}$$

donde d es la distancia en kilometros y f es la frecuencia en MHz. Además, medidas de campo le hacen pensar que la densidad espectral de potencia del ruido no superará el valor de $N_0/2 = 10^{-18}\,\mathrm{W/Hz}$.

(c) Si la máxima probabilidad de error de bits que puede tolerar el sistema es de 10^{-3}, ¿qué alcance tendrá el sistema? Tome el mejor escenario dadas las bandas disponibles.

Una segunda hojeada al estándar le hace notar que en realidad se usa $\pi/4$-QPSK, una variante de QPSK donde los símbolos pares se envían con la constelación habitual, y los impares con una contelación girada $\pi/4$.

(d) Dibuje en el plano complejo la señal bandabase "típica" generada por el QPSK original, y el $\pi/4$-QPSK. ¿Qué ventajas puede tener esta modulación?

Problema 2

Está diseñando un sistema de comunicación digital para operar de manera inalámbrica barreras de acceso a estacionamientos. Usted no sabe si el estacionamiento que use su sistema será al aire libre, o en un subsuelo, pero está seguro que por tratarse de lugares con alta concurrencia, vehículos en movimiento, y eventualmente paredes y obstáculos importantes, debe utilizar un modulación bien robusta. Además, la tasa de datos a enviar tampoco es muy alta, y cuenta con un canal de 100 kHz destinado especialmente. Decide entonces que utilizará BPSK como esquema de modulación. Los bits a transmitir pueden asumirse equiprobables, pues en su diseño agregará bloques de procesamiento para garantizar esta hipótesis.

(a) Realice un diagrama de bloques completo del par transmisor-receptor utilizando pulso apareado.

(b) Plantee el sistema como un canal binario simétrico. ¿Cómo modelaría el canal en el diagrama de bloques anterior?

Luego de varias pruebas de campo concluye que la probabilidad de error de símbolo debe asumirse del orden del 1 %.

(c) Calcule la capacidad del canal en bits por uso del canal y bits por segundo. Asuma un roll-off factor del 20 %. Interprete el resultado .

Usted recuerda que cuando la tasa de error de símbolo es tan importante, definir umbrales de decisión con borrado puede ser una buena estrategia, al menos desde un punto de vista teórico.

(d) Plantee el sistema como un canal binario y con borrado. Asuma una probabilidad de borrado del 4 % y una probabilidad de error nula. Calcule la capacidad del canal.

(e) Basado en los cálculos anteriores, ¿cómo diseñaría el sistema? ¿Cuál es la mayor tasa de bits de información que teóricamente se puede lograr?

Solución

Problema 1

(a) Ver Fig. 1

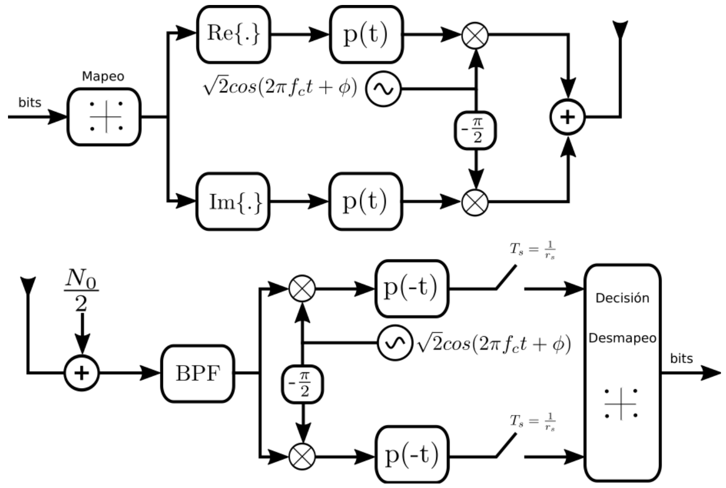

Figura 1: Transmisor y receptor de sistema QPSK

(b) El ancho de banda del canal esta dado por

$$B_T = r_s \cdot (1 + \rho) \rightarrow r_s = \frac{B_T}{1 + \rho}$$

La tasa de símbolos r_s máxima se dara para $\rho = 0$, de esta forma

$$r_s = B_T \rightarrow r_s = 180kbps$$

La tasa máxima de bits de datos r_b es

$$r_{b_{max}} = log_2(M) \cdot r_s = 360kbps$$

Suponiendo un código corrector de errores con tasa 1/3, la tasa máxima de bits de datos es

$$r_{b_{max}} = \frac{1}{3} \cdot log_2(M) \cdot r_s = 120kbps$$

El bloque determinante en la respuesta es el bloque de mapeo, pues determina cuantos bits envío por símbolo y, con ello, la tasa de bits. Por otro lado, se diseña un sistema con una menor tasa de bits para lograr transmisiones más robustas frente al canal, es decir, con una menor probabilidad de error.

(c) Se tiene que para un sistema QPSK

$$P_{eb} = 10^{-3} = Q\left(\sqrt{\frac{S_T}{r_s \cdot L \cdot \sigma^2}}\right)$$

$$\sqrt{\frac{S_T}{r_s \cdot L \cdot N_0/2}} = Q^{-1}(10^{-3})$$

De la expresión anterior despejamos la atenuación en L

$$L = \frac{S_T}{r_s \cdot N_0/2 \cdot (Q^{-1}(10^{-3}))^2}$$

con

$$S_t = 1W \cdot 10^{20dBm/10} \cdot \frac{1}{1000} = 0.1W$$

$$N_0/2 = 10^{-18}W/Hz$$

$$Q^{-1}(10^{-3}) = 3.1$$

$$r_s = 180kbps$$

Resulta $L \approx 5.78 \times 10^{10}W$ y $L_{db} \approx 107.6dB$

Luego, de la expresión $L_{db} = 46.32 + 26.07\log_{10} f + 33.77\log_{10} d$

$$d = 10^{\frac{L_{db} - 26.07\log_{10} f - 46.32}{33.77}}$$

Considerando $f = 800$ dado que estamos en el mejor escenario. Se obtiene que $d \approx 0.38Km$.

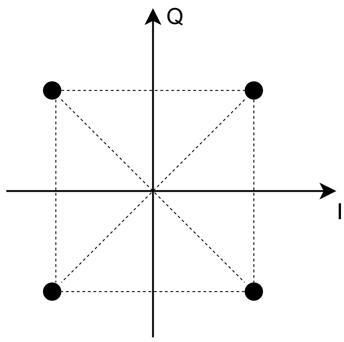

Figura 2: Señal QPSK

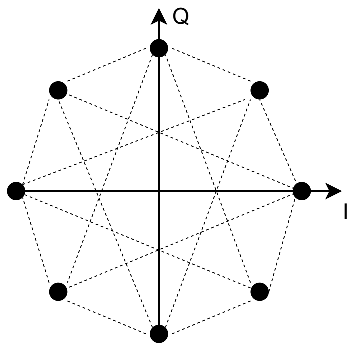

Figura 3: Señal $\pi/4$-QPSK

(d) En los sistemas de transmisión, es deseable que las señales mantengan una amplitud constante o, en su defecto, presenten una baja relación de potencia pico a potencia media (PAPR, por sus siglas en inglés). Esto tiene implicaciones prácticas, ya que los amplificadores funcionan de manera más eficiente bajo estas condiciones, lo que resulta en una mejor eficiencia energética.
En la Figura 1 se muestra la señal QPSK, mientras que en la Figura 2 se representa la señal $\pi/4$-QPSK. Las líneas punteadas representan la trayectoria de la señal en el tiempo. Se puede observar que la señal $\pi/4$-QPSK no cruza por cero y tiene un PAPR menor en comparación con el sistema QPSK.

Problema 2

(a) Ver figura 4.

(b) Modelamos el canal como un canal discreto y sin memoria. En ese caso, el canal resultante es como el de la figura 5, donde p es la probabilidad de error de bit.

(c) Calculamos la capacidad del canal en bits por uso del canal como:

$$C = max_\alpha I(X,Y) = max_\alpha H(Y) - H(Y|X)$$

donde:

- $H(Y) = \mathbb{E}[-\,log_2 P\,(y)] = 1$

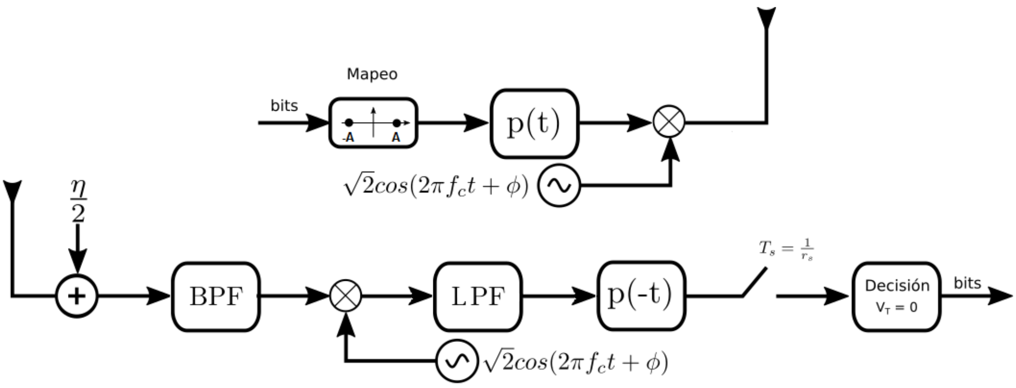

Figura 4: Diagrama de bloques del sistema BPSK

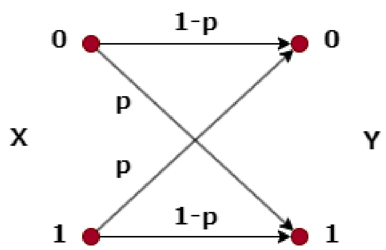

Figura 5: Canal binario simétrico

- $H(Y|X) = \mathbb{E}[-\,log_2 P\,(y|x)] = \Omega\,(p)$

Combinando las expresiones anteriores y evaluando en $p = 0.01$ obtenemos:

$$C = 1 - \Omega\,(p) = 0.9478 \; bits\ de\ información\ por\ símbolo$$

Por otra parte, podemos calcular la capacidad del canal en bits por segundo como:

$$C_t = rs\, C = \frac{B}{1+\rho} C = 78.98 \; kbits\ de\ información\ por\ segundo$$

Por lo tanto, existe algún código que permite transmitir sin errores a una tasa de aproximadamente 79 kbps.

(d) Ahora tenemos el sistema de la figura 6.

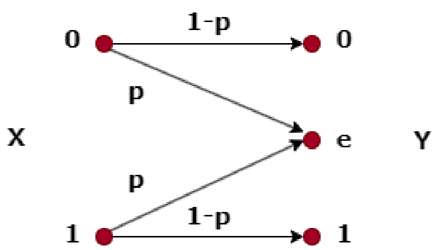

Figura 6: Canal binario simétrico con borrado

Análogamente, podemos calcular la capacidad del canal como:

$$C = max_\alpha I(X,Y) = max_\alpha H(Y) - H(Y|X)$$

donde:

- $H(Y) = \mathbb{E}[-\, log_2 P\,(y)] = 1 - p + \Omega\,(p)$
- $H(Y|X) = \mathbb{E}[-\, log_2 P\,(y|x)] = \Omega\,(p)$

Combinando las expresiones anteriores y evaluando en $p = 0.04$ obtenemos:

$$C = 1 - p = 0.96 \; \textit{bits de información por símbolo}$$

(e) Comparando las capacidades obtenidas anteriormente, observamos que para valores de probabilidad de error razonables es conveniente usar el canal con borrado, ya que permite una mayor capacidad del canal. Resta entonces encontrar un código con tres símbolos en recepción que logre alcanzar, o al menos aproximarse lo más posible, a esta tasa de máxima de información.