Universidad de la República **4 de julio de 2024**

Facultad de Ingeniería-IMERL

SEGUNDO PARCIAL: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA (SOLUCIÓN)

Ejercicio 1

Observamos que $\mu = \mathbb{E}(\alpha + 2Y) = \alpha + 2\frac{1}{1/2} = \alpha + 4$, además $\sigma^2 = \mathbb{V}(\alpha + 2Y) = 4\mathbb{V}(Y) = 4\frac{1}{(1/2)^2} = 16$. Entonces

$\mathbb{E}(\widehat{\alpha}) = \mathbb{E}\left(\overline{X}_n - 4\right) = \mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) - 4 = \mu - 4 = \alpha + 4 - 4 = \alpha$ por lo que $\widehat{\alpha}$ es un estimador insesgado de α.
Por lo tanto $ECM(\widehat{\alpha}) = \mathbb{V}(\widehat{\alpha}) = \mathbb{V}\left(\overline{X}_n - 4\right) = \sigma^2/n = 16/n$ por lo que la opción correcta es (A).

Ejercicio 2

La desigualdad de Chevishoff nos dice que $P(|X - \mathbb{E}(X)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$. En nuestro caso, tenemos $\mathbb{E}(X) = 1000$, $\mathbb{V}(X) = \sqrt{50}$. Entonces

$$P(935 \leq X \leq 1065) = P(|X - 1000| \leq 65) \geq 1 - (50/65)^2 = \frac{69}{169} = 0.408\,28$$

por lo que la opción correcta es (B).

Ejercicio 3

$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{xdx}{2} = \frac{13}{12}$
$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 \frac{x^2dx}{2} = \frac{17}{12}$, entonces $\mathbb{V}(X) = \frac{17}{12} - \left(\frac{13}{12}\right)^2 = \frac{35}{144} = 0.243\,06$.
Entonces

$$\mathbb{V}(2X_1 - 3X_2 - 4) = 4\mathbb{V}(X_1) + 9\mathbb{V}(X_2) = 13\mathbb{V}(X) = 13 \times 0.243 = 3.159$$

por lo que la opción correcta es (D).

Ejercicio 4

La RC para esta prueba es $RC = \left\{\overline{X}_n \leq \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_\alpha\right\} = \left\{\overline{X}_n \leq 3.5 - \frac{2}{\sqrt{20}} 1.645\right\} = \left\{\overline{X}_n \leq 2.764\,3\right\}$.
Cuando $\mu = 2.5$, la potencia de la prueba es $P_{H_1}(RC) = P_{\mu=2.5}\left(\overline{X}_n \leq 2.764\,3\right) = (*)$.
Como la muestra es de variables normales, se sabe que la distribución de $\overline{X}_n$ es $N(\mu, \sigma^2/n) = N(2.5; 4/20) = N(2.5; 0.2)$.
Entonces la potencia de la prueba es $(*) = \phi\left(\frac{2.7643 - 2.5}{\sqrt{0.2}}\right) = \phi(0.591) = 0.723$ por lo que la opción correcta es (D).

Ejercicios de desarrollo

Ejercicio 1

1. Calculamos $\int_0^1 x\alpha\left(\alpha+1\right)x^{\alpha-1}\left(1-x\right)dx = \alpha\left(\alpha+1\right)\int_0^1\left(x^{\alpha}-x^{\alpha+1}\right)dx = \alpha - \frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+2} = \frac{\alpha}{\alpha+2}$.

   Planteamos la ecuación $\mathbb{E}\left(X\right) = \overline{X}_n$ lo que equivale a $\frac{\alpha}{\alpha+2} = \overline{X}_n$, despejando α, obtenemos que

$$\widehat{\alpha} = \frac{2\overline{X}_n}{1-\overline{X}_n}.$$

2. Por la ley de los grandes números sabemos que $\overline{X}_n \overset{c.s.}{\to} \mathbb{E}\left(X\right) = \frac{\alpha}{\alpha+2}$, entonces

$$\widehat{\alpha} = \frac{2\overline{X}_n}{1-\overline{X}_n} \overset{c.s.}{\to} \frac{2\frac{\alpha}{\alpha+2}}{1-\frac{\alpha}{\alpha+2}} = \alpha$$

   lo que prueba que el estimador $\widehat{\alpha}$ es consistente.

Ejercicio 2

1. La RC adecuada para esta prueba es $RC = \left\{\overline{X}_n \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha}\right\} = \left\{\overline{X}_n \geq 100 + \frac{4.4}{\sqrt{30}}2.33\right\} = \left\{\overline{X}_n \geq 101.87\right\}$.

   Asumiendo que n es suficientemente grande, el teorema central del límite nos permite afirmar que la distribución de $\overline{X}_n$ es aproximadamente $N\left(\mu,\sigma^2/n\right) = N\left(\mu; 0.645\right)$ el valor de μ es 100 cuando calculamos bajo H_0 cierto y 103 cuando H_1 es cierto. Entonces $\beta = P_{H_1}\left(RC^c\right) = P_{H_1}\left(\overline{X}_n < 101.87\right) \sim \phi\left(\frac{101.87-103}{\sqrt{0.645}}\right) = \phi(-1.407) = 0.071$.

2. p-valor= $P\left(\overline{X}_n \geq 101\right) \sim 1-\phi\left(\frac{101-100}{\sqrt{0.645}}\right) = 1-\phi(1.2451) = 1-0.895 = 0.105$.

   Como estamos trabajando al nivel aproximado de $\alpha = 0.01$ y tenemos que p-valor $> \alpha$, entonces se decide no rechazar H_0.

Ejercicio 3

1. El intervalo de confianza aproximado para la proporción p en una Bernoulli es

$$\left[\overline{X}_n - \frac{\sqrt{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\ ;\ \overline{X}_n + \frac{\sqrt{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right] =$$

$$\left[0.13 - \frac{\sqrt{0.13\times 0.87}}{10}1.96\ ;\ 0.13 + \frac{\sqrt{0.13\times 0.87}}{10}1.96\right] = \left[0.064; 0.196\right].$$

2. Teniendo en cuenta que $x(1-x) \leq 1/4$ para todo x, tenemos que la longitud del intervalo de confianza es $\frac{2\sqrt{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} = \frac{2\sqrt{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}}{\sqrt{n}} 1.96 \leq \frac{1.96}{\sqrt{n}} \leq 0.1$ de donde se deduce que $n \geq \left(\frac{1.96}{0.1}\right)^2 = 384.16$ por lo que la muestra debe ser de tamaño $n \geq 385$.

Ejercicio 4

Planteamos

$$h(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(f_X\left(x_i, \alpha\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{x_i}} e^{-\alpha\sqrt{x_i}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\log(\alpha) - \alpha\sqrt{x_i} - \log\left(2\sqrt{x_i}\right)\right] =$$

$$n\log(\alpha) - \alpha\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} - \sum_{i=1}^{n}\log\left(2\sqrt{x_i}\right).$$

Entonces

$$h'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} = \frac{n - \alpha\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\alpha} = 0 \text{ si y sólo si } \alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}.$$

Por otro lado, el signo de $h'(\alpha)$ cambia en los valores $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}$ y comienza con signo negativo para valores de $\alpha > \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}$ por lo tanto se maximiza en $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}$ y entonces el estimador máximo verosímil es $\widehat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}$.

De acuerdo a los datos de nuestra muestra tenemos que

$$\widehat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}} = \frac{5}{\sqrt{0.01}+\sqrt{0.17}+\sqrt{0.03}+\sqrt{0.06}+\sqrt{0.03}} = 4.53.$$