Universidad de la República	**4 de julio de 2024**
Facultad de Ingeniería-IMERL	

SEGUNDO PARCIAL: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Nº de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple opción (Total: 30 puntos)

En cada pregunta hay sólo una opción correcta.

Respuesta correcta: 7.5 puntos, respuesta incorrecta: -1.875 puntos, no respuesta: 0 punto.

Colocar las respuestas en el siguiente cuadro.

1	2	3	4

Ejercicio 1

Se considera $X_1, X_2, ..., X_n$ i.i.d. con distribución como la de X de la cual se sabe que $X = \alpha + 2Y$ siendo $Y \sim \text{Exp}(\lambda = 1/2)$ y se define el estimador de α dado por $\hat{\alpha} = \overline{X}_n - 4$.

Entonces

(A) $\hat{\alpha}$ es insesgado y su error cuadrático medio es $16/n$.

(B) $\hat{\alpha}$ es insesgado y su error cuadrático medio es $2/n$.

(C) $\hat{\alpha}$ no es insesgado y su error cuadrático medio es $16/n$.

(D) $\hat{\alpha}$ no es insesgado y su error cuadrático medio es $2/n$.

(E) $\hat{\alpha}$ es insesgado y su error cuadrático medio es $4/n$.

Ejercicio 2

En un proyecto de ingeniería, la resistencia de cierto tipo de material es crítica. Se sabe que la media de resistencia a la tracción de un tipo específico de material es $\mu = 1000$ MPa (Mega Pascales) y la desviación estándar es de $\sigma = 50$ MPa. Si se toma uno de estos materiales y se mide su resistencia y le llamamos p a la probabilidad de que dicha resistencia se encuentre entre 935 y 1065. Entonces, según la desigualdad de Chevishoff podemos concluir que

(A) $p \geq 0.612$.

(B) $p \geq 0.408$.

(C) $p \leq 0.408$.

(D) $p \leq 0.612$.

(E) $p = 0.431$.

Ejercicio 3

X_1 y X_2 son variables independientes con distribución como la de X cuya densidad viene dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} .$$

Entonces $\mathbb{V}ar\,(2X_1 - 3X_2 - 4)$ es igual a

(A) 2.321.

(B) 3.955.

(C) 2.322.

(D) 3.159.

(E) 5.318.

Ejercicio 4

Se dispone de una muestra aleatoria simple $X_1, \cdots, X_{20}$ proveniente de una variable que tiene distribución normal con media μ y desvío $\sigma = 2$. Se considera la prueba de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 & \mu = 3.5 \\ H_1 & \mu < 3.5 \end{cases}$$

al nivel $\alpha = 0.05$. Suponiendo que $\mu = 2.5$, entonces la potencia de la prueba es:

(A) 0.28.

(B) 0.05.

(C) 0.36.

(D) 0.72.

(E) 0.60.

Ejercicios de desarrollo (Total: 30 puntos)

Ejercicio 1 (8 puntos)

Se considera $X_1, X_2, ..., X_n$ i.i.d. con distribución como la de X de la cual se sabe que tiene la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1}(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $\alpha > 0$.

1. Hallar $\hat{\alpha}$ por el método de los momentos.
2. Probar que $\hat{\alpha}$ es un estimador consistente de α.

Ejercicio 2 (8 puntos)

En cierta línea de una planta generadora de energía eléctrica se debe tener una presión media de 100 $lb/pulg^2$. Si la presión media llegara a ser de 103 $lb/pulg^2$ podrían surgir complicaciones serias. La ingeniera a cargo de la planta realizó 30 mediciones obteniendo un promedio en su muestra de 101 $lb/pulg^2$ y un desvío en la muestra de 4.4 $lb/pulg^2$. Se asume que el tamaño de la muestra es suficientemente grande y se plantea la prueba de hipótesis

$$H_0 : \mu = 100$$
$$H_1 : \mu = 103$$

para un nivel aproximado del 1%.

1. Hallar la probabilidad aproximada de error tipo II.
2. Hallar el p-valor aproximado de la prueba y tomar la decisión.

Ejercicio 3 (7 puntos)

Se toma una muestra de personas para estudiar el porcentaje de personas portadoras de cierto virus en una población. En una muestra de 100 personas, 13 son portadores del virus.

1. Dar un intervalo de confianza 95% para p: el verdadero porcentaje de personas portadoras del virus en la población.
2. ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que la longitud total del intervalo de confianza al 95% para p sea menor o igual a 0.1?

Ejercicio 4 (7 puntos)

La siguiente muestra

$$X_1{=}0.01 \quad X_2{=}0.17 \quad X_3{=}0.03 \quad X_4{=}0.06 \quad X_5{=}0.03$$

corresponde a mediciones independientes de una variable aleatoria cuya densidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} e^{-\alpha\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $\alpha > 0$. Estimar α por el método de máxima verosimilitud.

Tabla de la función $\phi(z) = F_Z(z)$, siendo Z con distribución N(0,1).

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Tabla de la distribución T-Student con r grados de libertad.

	$P(T \leq t)$						
	0.60	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
r	$t_{0.40}(r)$	$t_{0.25}(r)$	$t_{0.10}(r)$	$t_{0.05}(r)$	$t_{0.025}(r)$	$t_{0.01}(r)$	$t_{0.005}(r)$
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.997
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576