

# DINÁMICA

| Newton-Euler

Fundamentos de Robótica Industrial

Versión 2025





## Fundamentos de Robótica Industrial



## Introducción

La **dinámica** es la rama de la física que se ocupa de estudiar la **evolución en el tiempo** de un sistema físico y las **causas** que provocan sus alteraciones.

Esta área incluye:

- La **cinemática**: estudio de la geometría del movimiento, relacionando desplazamientos, velocidades y aceleraciones, con las características geométricas del sistema.
- La **cinética**: estudio de la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un sistema, su masa (y la distribución) y el movimiento del mismo.

No obstante, es habitual encontrar como **dinámica del robot**, al estudio de la relación entre las fuerzas que actúan sobre un sistema y el movimiento que en él se producen (i.e. cinética).

# Introducción

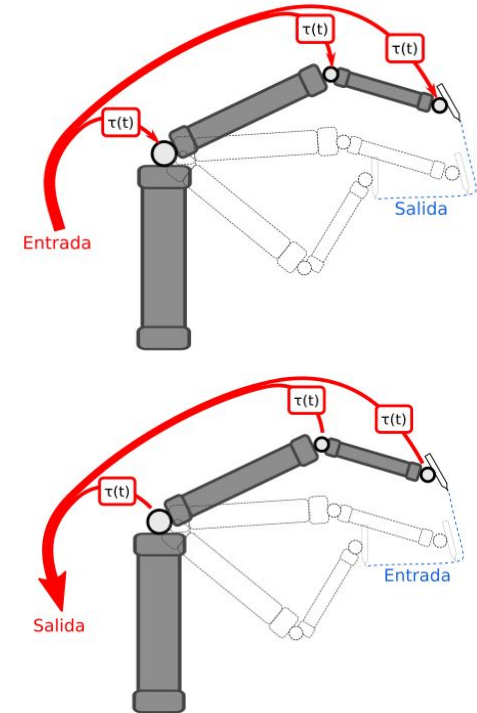
La dinámica del robot quedará establecida mediante el denominado *modelo dinámico*, que establece la relación matemática entre:

1. La localización del robot definida por:
  - a. Sus variables articulares y sus derivadas
  - b. ó por la localización de su extremo y sus derivadas
2. Las fuerzas y los pares:
  - a. Articulares
  - b. o en su extremo
3. Los parámetros dimensionales del robot:
  - a. Longitudes
  - b. Masas
  - c. Inercias

# Introducción

Al igual que en la cinemática, se definirán dos tipos de problemas o modelos:

- El **modelo dinámico directo**: que expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares del robot en función de las fuerzas y pares que intervienen:  $\theta(t) = f(\tau(t))$
- El **modelo dinámico inverso**: que determina las fuerzas y pares necesarios para conseguir una evolución de las coordenadas articulares determinada:  $\tau(t) = g(\theta(t))$



# Introducción

## Algunos comentarios:

- El planteo y resolución del modelo dinámico de mecanismos de 1 o 2 GDL es manejable, pero al aumentar los GDL, la complejidad crece al punto de no ser posible su planteo de forma cerrada. En estos casos, su planteo debe realizarse de manera iterativa, así como su resolución, esto es, instante a instante.
- Forma cerrada: como un conjunto de ecuaciones diferenciales (generalmente de 2º orden) que su integración permite obtener:
  - La trayectoria del puntero a partir del ingreso de los torques articulares
  - o los torques articulares a partir del ingreso de la trayectoria del puntero.
- Es importante notar que el modelo dinámico **completo** de un robot debe incluir no sólo la dinámica de sus elementos (barras o eslabones) sino también la propia de sus sistemas de transmisión, actuadores, los equipos electrónicos y de mando. Estos elementos incorporan nuevas inercias, rozamientos, saturaciones, aumentando aún más su complejidad.

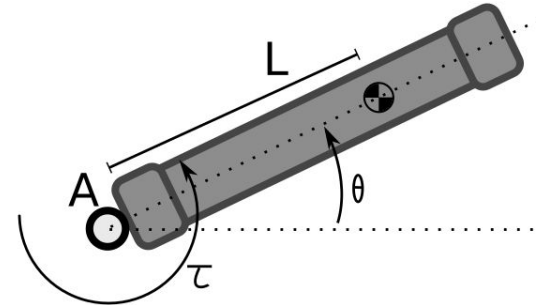
## Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

Principalmente existen 2 procedimientos para determinar el modelo dinámico de un robot.

1. El **método de Newton-Euler**, que se basa en la aplicación de la primera y la segunda ley de Newton.
2. La **formulación Lagrangiana**, que se basa en consideraciones energéticas.

Consideremos el siguiente ejemplo:

- un robot rígido,
- articulado en **A**,
- peso **m** uniformemente distribuido,
- distancia al centro de masa **L**,
- par articular  **$\tau$**



# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

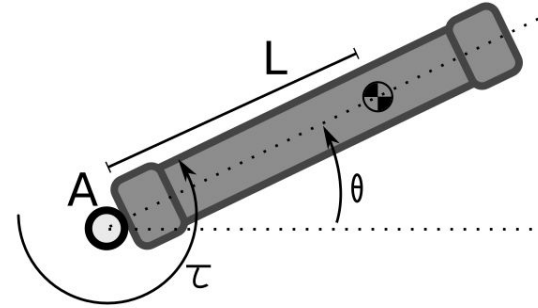
## *método de Newton-Euler*

Variación de  
cantidad de  
movimiento

$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- $\boldsymbol{\omega}$ : Velocidad angular
- $\mathbf{I}$ : Tensor de inercias
- $\mathbf{T}$ : Torques externos
- $\mathbf{F}$ : Fuerzas externas
- $m$ : masa
- $\mathbf{v}$ : velocidad





# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

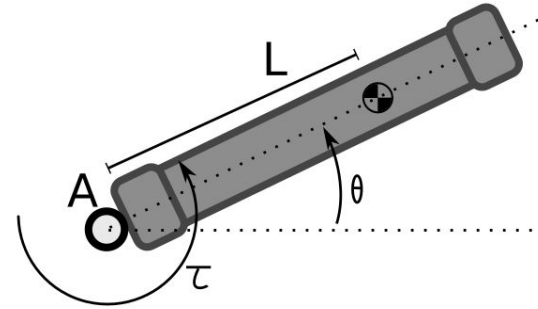
## método de Newton-Euler

Variación de  
cantidad de  
movimiento

$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- $\boldsymbol{\omega}$ : Velocidad angular
- $\mathbf{I}$ : Tensor de inercias
- $\mathbf{T}$ : Torques externos
- $\mathbf{F}$ : Fuerzas externas
- $m$ : masa
- $\mathbf{v}$ : velocidad



# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

## método de Newton-Euler

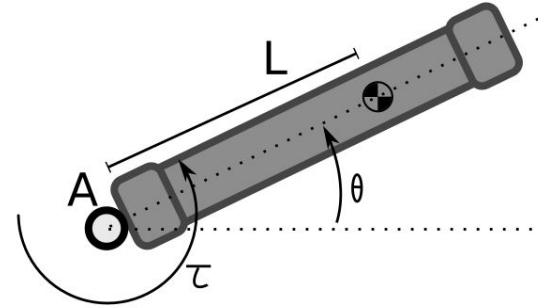
Variación de  
cantidad de  
movimiento

$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- $\boldsymbol{\omega}$ : Velocidad angular
- $\mathbf{I}$ : Tensor de inercias
- $\mathbf{T}$ : Torques externos
- $\mathbf{F}$ : Fuerzas externas
- $m$ : masa
- $\mathbf{v}$ : velocidad

$$\tau - MgL\cos(\theta) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\ddot{\theta}$$



# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

## método de Newton-Euler

Variación de  
cantidad de  
movimiento

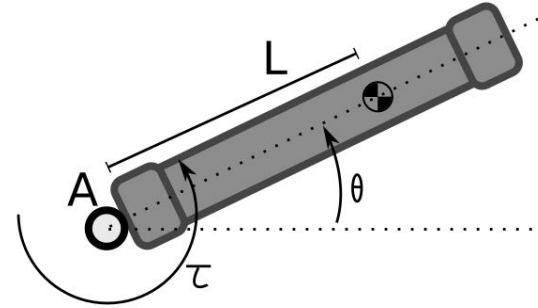
$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- $\boldsymbol{\omega}$ : Velocidad angular
- $\mathbf{I}$ : Tensor de inercias
- $\mathbf{T}$ : Torques externos
- $\mathbf{F}$ : Fuerzas externas
- $m$ : masa
- $\mathbf{v}$ : velocidad

$$\tau - MgL\cos(\theta) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\ddot{\theta}$$

$$\tau = ML^2\ddot{\theta} + MgL\cos(\theta)$$



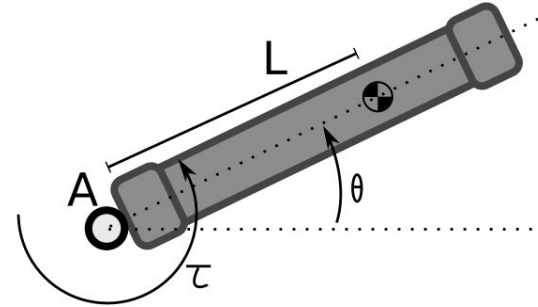
## Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

**formulación Lagrangiana**

$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- $q_i$ : coordenadas generalizadas
- $\tau_i$ : fuerza o par aplicado en el grado de libertad  $q_i$



## Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

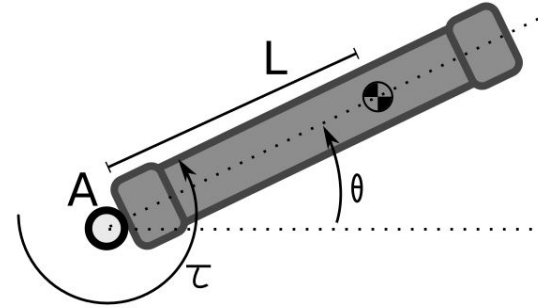
### *formulación Lagrangiana*

$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- $q_i$ : coordenadas generalizadas
- $\tau_i$ : fuerza o par aplicado en el grado de libertad  $q_i$

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2$$



## Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

### *formulación Lagrangiana*

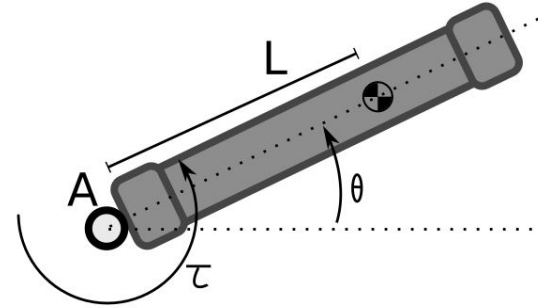
$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- $q_i$ : coordenadas generalizadas
- $\tau_i$ : fuerza o par aplicado en el grado de libertad  $q_i$

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = Mgh = MgL \sin(\theta)$$



## Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

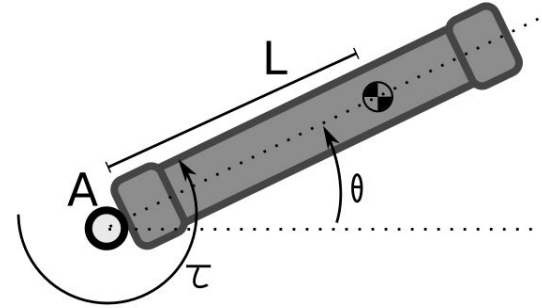
### formulación Lagrangiana

$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- $q_i$ : coordenadas generalizadas
- $\tau_i$ : fuerza o par aplicado en el grado de libertad  $q_i$

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 \quad U = Mgh = MgL \sin(\theta) \quad \longrightarrow \quad L = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 - MgL \sin(\theta)$$



# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

## formulación Lagrangiana

$$L = K - U$$

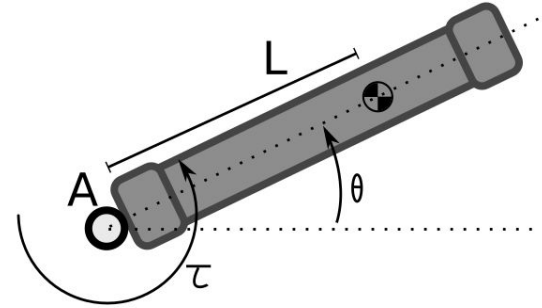
$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- $q_i$ : coordenadas generalizadas
- $\tau_i$ : fuerza o par aplicado en el grado de libertad  $q_i$

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = Mgh = MgL \sin(\theta) \longrightarrow L = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 - MgL \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -MgL \cos(\theta)$$





# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

## formulación Lagrangiana

$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

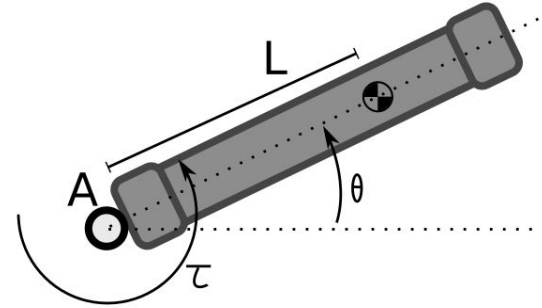
- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- $q_i$ : coordenadas generalizadas
- $\tau_i$ : fuerza o par aplicado en el grado de libertad  $q_i$

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = Mgh = MgL \sin(\theta) \longrightarrow L = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 - MgL \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -MgL \cos(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M L^2 \dot{\theta}$$



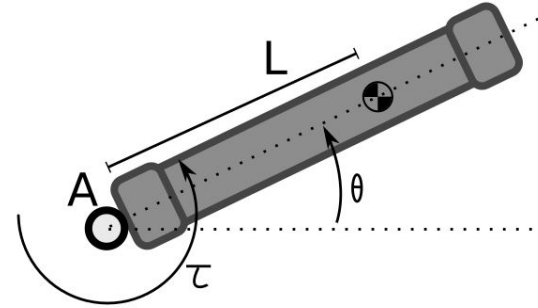
# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

## formulación Lagrangiana

$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- $q_i$ : coordenadas generalizadas
- $\tau_i$ : fuerza o par aplicado en el grado de libertad  $q_i$



$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = Mgh = MgL \sin(\theta) \longrightarrow L = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 - MgL \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -MgL \cos(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M L^2 \dot{\theta}$$

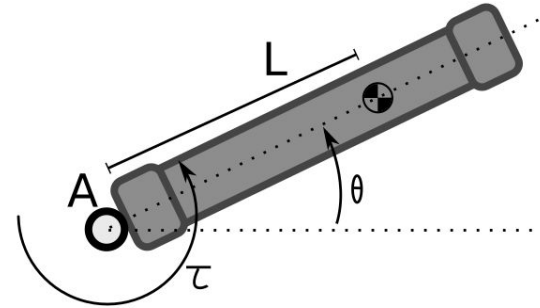
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M L^2 \ddot{\theta} \longrightarrow \boxed{\tau = M L^2 \ddot{\theta} + M g L \cos(\theta)}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

## Comentarios

- Plantear el equilibrio de fuerzas de un robot real de varios GDL no es tan simple como el ejercicio de ejemplo. Deben considerarse además de las fuerzas de inercia y de gravedad, las centrípetas y las fuerzas de Coriolis.
- Aunque para el ejemplo, fue más tediosa la resolución al plantear la formulación Lagrangiana que la Newtoniana, con el aumento de los GDL, esta relación se invierte.
- La formulación Lagrangiana conduce de manera sistemática a ecuaciones bien estructuradas donde se pueden identificar las componentes inerciales, las fuerzas de coriolis, las fuerzas centrífugas y las de masa.
- Independientemente del procedimiento para obtener el modelo dinámico del robot, para  $n$  GDL el modelo se presenta de la siguiente forma:

$$\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q)$$



Donde:

$q$ : vector (n) de coordenadas articulares

$T$ : vector (n) de cargas en cada articulación

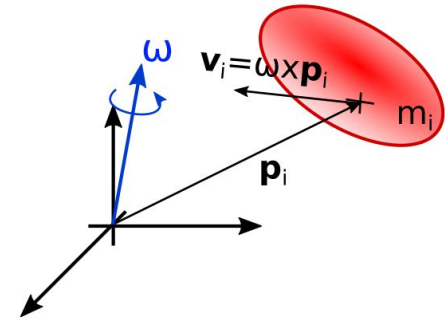
$\mathbf{M}$ : Matriz (nxn) de inercias

$\mathbf{C}$ : Vector de fuerzas de Coriolis + centrífugas

$\mathbf{G}$ : Vector de fuerzas gravitatorias

# Modelo dinámico - Momento angular

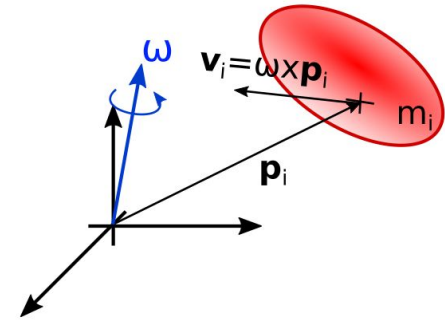
*Momento angular en un Movimiento rígido*



## Modelo dinámico - Momento angular

*Momento angular en un Movimiento rígido*

$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

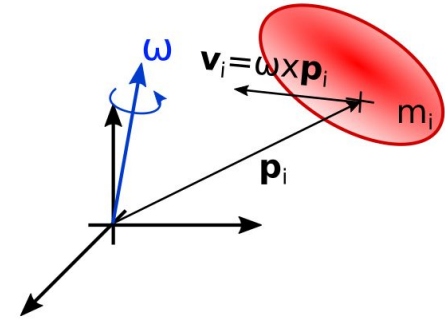


## Modelo dinámico - Momento angular

*Momento angular en un Movimiento rígido*

$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i)$$



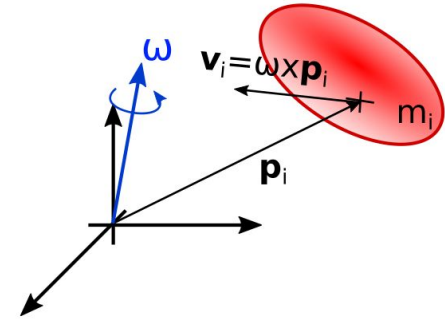
## Modelo dinámico - Momento angular

*Momento angular en un Movimiento rígido*

$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) \quad \text{---} \quad m_i = \rho dV$$

$$\phi = \int \mathbf{p}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) \rho dV \quad \longleftarrow$$



# Modelo dinámico - Momento angular

## Momento angular en un Movimiento rígido

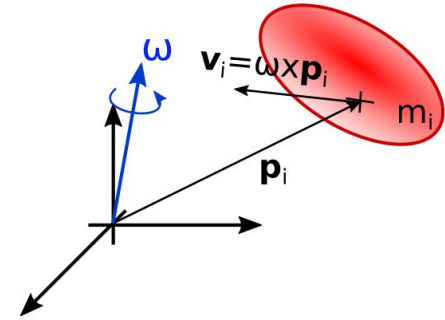
$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) \quad m_i = \rho dV$$

$$\phi = \int \mathbf{p}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) \rho dV$$

$$\phi = \int_V \mathbf{p}_i \times (-\mathbf{p}_i \times \boldsymbol{\omega}) \rho dV$$

**Propiedad:**  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i = -\mathbf{p}_i \times \boldsymbol{\omega}$





# Modelo dinámico - Momento angular

## Momento angular en un Movimiento rígido

$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) \quad m_i = \rho dV$$

$$\phi = \int_V \mathbf{p}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) \rho dV$$

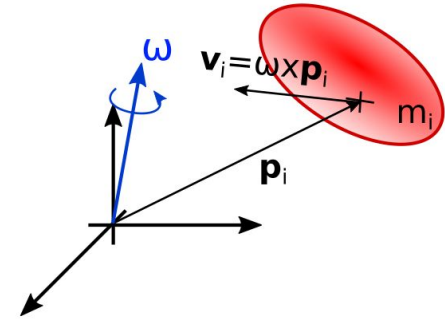
$$\phi = \int_V \mathbf{p}_i \times (-\mathbf{p}_i \times \boldsymbol{\omega}) \rho dV$$

$$\phi = \left[ \int_V -\hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}} \rho dV \right] \boldsymbol{\omega}$$

Recordando: el operador del producto cruzado:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{a}} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{p} \times (-\mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega}) = -\hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}} \boldsymbol{\omega}$$



# Modelo dinámico - Momento angular

*Momento angular en un Movimiento rígido*

$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

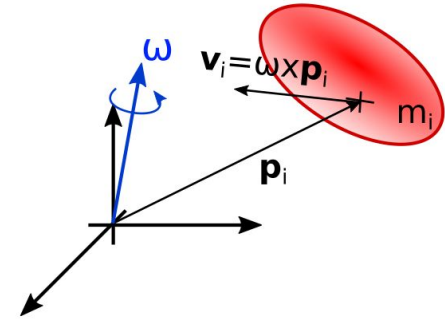
$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) \quad \text{---} \quad m_i = \rho dV$$

$$\phi = \int \mathbf{p}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) \rho dV \quad \leftarrow$$

$$\phi = \int_V \mathbf{p}_i \times (-\mathbf{p}_i \times \boldsymbol{\omega}) \rho dV$$

$$\phi = \left[ \int_V -\hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}} \rho dV \right] \boldsymbol{\omega}$$

**Tensor de inercia**



# Modelo dinámico - Momento angular

*Momento angular en un Movimiento rígido*

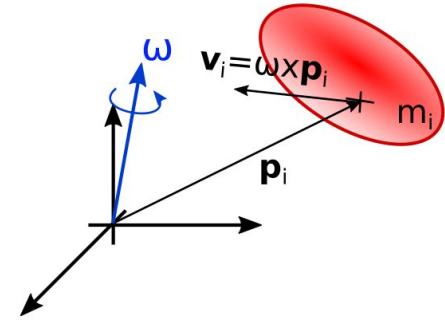
$$\phi = \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) \quad m_i = \rho dV$$

$$\phi = \int \mathbf{p}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) \rho dV$$

$$\phi = \int_V \mathbf{p}_i \times (-\mathbf{p}_i \times \boldsymbol{\omega}) \rho dV$$

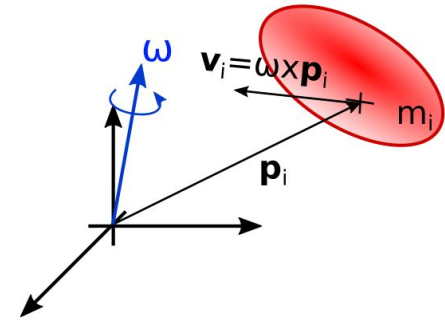
$$\phi = \left[ \int_V -\hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}} \rho dV \right] \boldsymbol{\omega} \longrightarrow \phi = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad \mathbf{I} = \int_V -\hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}} \rho dV$$



## Modelo dinámico - Tensor de Inercia

*Tensor de Inercia*

$$I = \int_V \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}} \rho dV$$

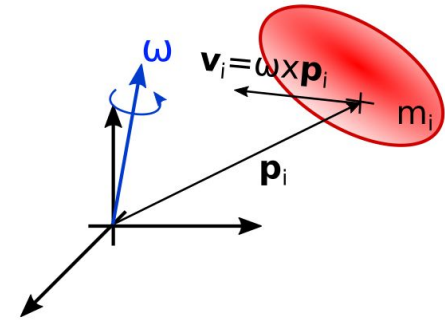


## Modelo dinámico - Tensor de Inercia

**Tensor de Inercia**

$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV \longrightarrow (-\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

$$I = \int_V [(\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T] \rho dV$$



## Modelo dinámico - Tensor de Inercia

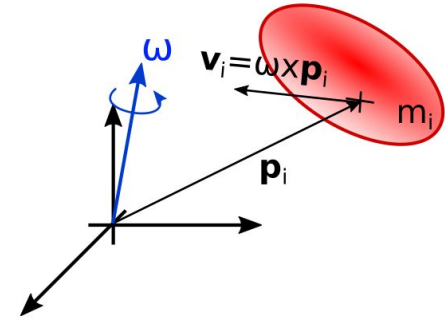
**Tensor de Inercia**

$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV \longrightarrow (-\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

$$I = \int_V [(\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T] \rho dV$$

Resolviendo por términos:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^T \mathbf{p} =$$



## Modelo dinámico - Tensor de Inercia

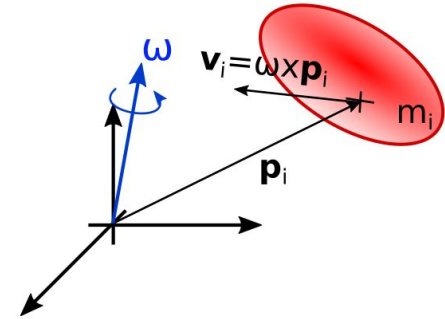
**Tensor de Inercia**

$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV \longrightarrow (-\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

$$I = \int_V [(\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T] \rho dV$$

Resolviendo por términos:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^T \mathbf{p} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \Rightarrow (\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 =$$



## Modelo dinámico - Tensor de Inercia

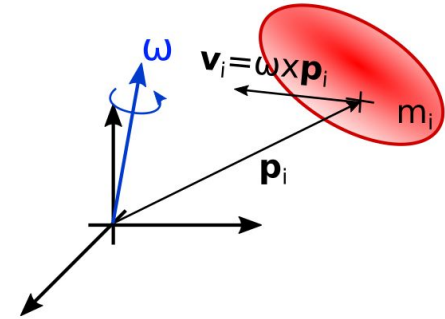
**Tensor de Inercia**

$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV \longrightarrow (-\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

$$I = \int_V [(\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T] \rho dV$$

Resolviendo por términos:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^T \mathbf{p} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \Rightarrow (\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





## Modelo dinámico - Tensor de Inercia

**Tensor de Inercia**

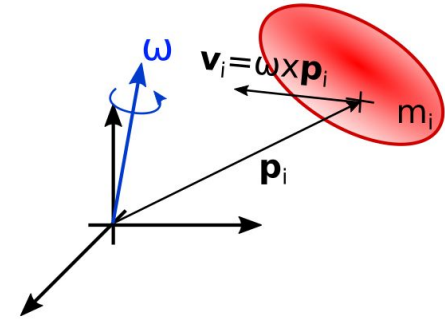
$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV \longrightarrow (-\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

$$I = \int_V [(\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T] \rho dV$$

Resolviendo por términos:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^T \mathbf{p} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \Rightarrow (\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} (p_x \ p_y \ p_z) = \begin{pmatrix} p_x^2 & p_x p_y & p_x p_z \\ p_x p_y & p_y^2 & p_y p_z \\ p_x p_z & p_y p_z & p_z^2 \end{pmatrix}$$

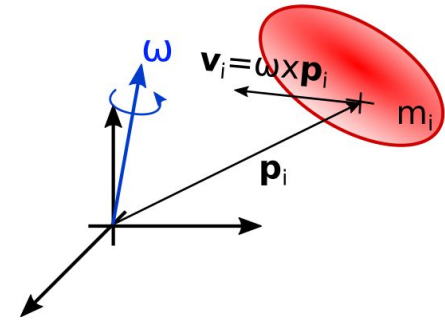


# Modelo dinámico - Tensor de Inercia

**Tensor de Inercia**

$$I = \int_V -\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}\rho dV \longrightarrow (-\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

$$I = \int_V [(\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T] \rho dV$$



Resolviendo por términos:

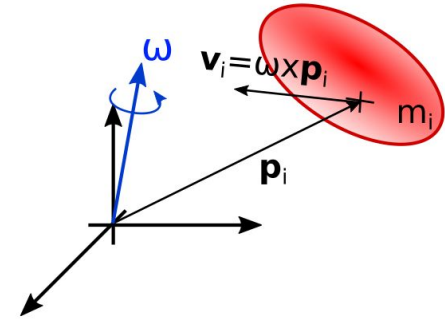
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^T \mathbf{p} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \Rightarrow (\mathbf{p}^T \mathbf{p})\mathbf{I}_3 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} (p_x \ p_y \ p_z) = \begin{pmatrix} p_x^2 & p_x p_y & p_x p_z \\ p_x p_y & p_y^2 & p_y p_z \\ p_x p_z & p_y p_z & p_z^2 \end{pmatrix} \longrightarrow I = \int_V \begin{pmatrix} p_y^2 + p_z^2 & -p_x p_y & -p_x p_z \\ -p_x p_y & p_x^2 + p_z^2 & -p_y p_z \\ -p_x p_z & -p_y p_z & p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \rho dV$$

# Modelo dinámico - Tensor de Inercia

## *Tensor de Inercia*

$$I = \int_V \begin{pmatrix} p_y^2 + p_z^2 & -p_x p_y & -p_x p_z \\ -p_x p_y & p_x^2 + p_z^2 & -p_y p_z \\ -p_x p_z & -p_y p_z & p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \rho dV$$

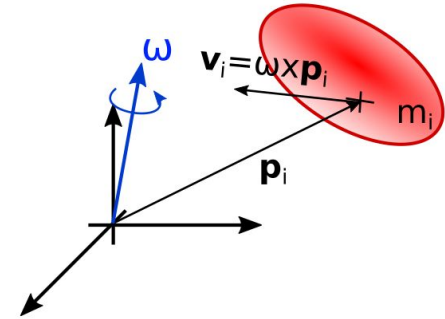


# Modelo dinámico - Tensor de Inercia

## Tensor de Inercia

$$I = \int_V \begin{pmatrix} p_y^2 + p_z^2 & -p_x p_y & -p_x p_z \\ -p_x p_y & p_x^2 + p_z^2 & -p_y p_z \\ -p_x p_z & -p_y p_z & p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \rho dV$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$



# Modelo dinámico - Tensor de Inercia

## Tensor de Inercia

$$I = \int_V \begin{pmatrix} p_y^2 + p_z^2 & -p_x p_y & -p_x p_z \\ -p_x p_y & p_x^2 + p_z^2 & -p_y p_z \\ -p_x p_z & -p_y p_z & p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \rho dV$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} = \iiint (y^2 + z^2) \rho \, dx dy dz$$

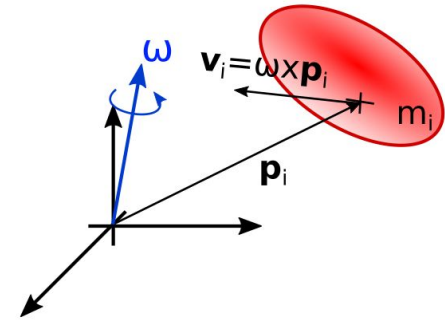
$$I_{yy} = \iiint (x^2 + z^2) \rho \, dx dy dz$$

$$I_{zz} = \iiint (y^2 + x^2) \rho \, dx dy dz$$

$$I_{xy} = \iiint xy \rho \, dx dy dz$$

$$I_{xz} = \iiint xz \rho \, dx dy dz$$

$$I_{yz} = \iiint yz \rho \, dx dy dz$$



# Modelo dinámico - Tensor de Inercia

## Tensor de Inercia

$$I = \int_V \begin{pmatrix} p_y^2 + p_z^2 & -p_x p_y & -p_x p_z \\ -p_x p_y & p_x^2 + p_z^2 & -p_y p_z \\ -p_x p_z & -p_y p_z & p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \rho dV$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} = \iiint (y^2 + z^2) \rho \, dxdydz$$

$$I_{yy} = \iiint (x^2 + z^2) \rho \, dxdydz$$

$$I_{zz} = \iiint (y^2 + x^2) \rho \, dxdydz$$

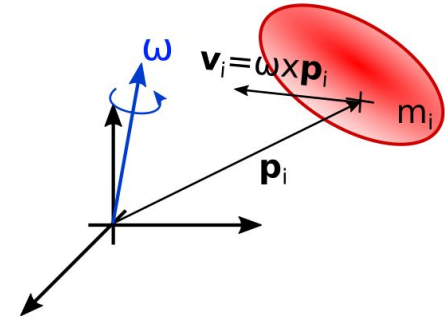
$$I_{xy} = \iiint xy \rho \, dxdydz$$

$$I_{xz} = \iiint xz \rho \, dxdydz$$

$$I_{yz} = \iiint yz \rho \, dxdydz$$

**Momentos de Inercia**

**Productos de Inercia**



## Modelo dinámico - Tensor de Inercia

**Tensor de Inercia**

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} = \iiint (y^2 + z^2) \rho \, dxdydz$$

$$I_{yy} = \iiint (x^2 + z^2) \rho \, dxdydz$$

$$I_{zz} = \iiint (y^2 + x^2) \rho \, dxdydz$$

$$I_{xy} = \iiint xy \rho \, dxdydz$$

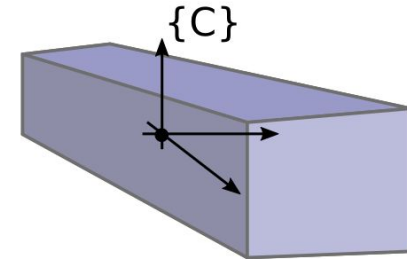
$$I_{xz} = \iiint xz \rho \, dxdydz$$

$$I_{yz} = \iiint yz \rho \, dxdydz$$

*Momentos de Inercia*

*Productos de Inercia*

**Generalización del teorema de ejes paralelos (Steiner)**



## Modelo dinámico - Tensor de Inercia

**Tensor de Inercia**

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} = \iiint (y^2 + z^2) \rho \, dxdydz$$

$$I_{yy} = \iiint (x^2 + z^2) \rho \, dxdydz$$

$$I_{zz} = \iiint (y^2 + x^2) \rho \, dxdydz$$

$$I_{xy} = \iiint xy \rho \, dxdydz$$

$$I_{xz} = \iiint xz \rho \, dxdydz$$

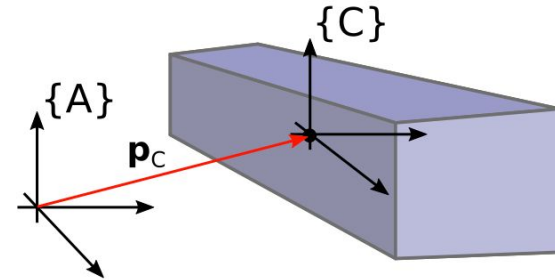
$$I_{yz} = \iiint yz \rho \, dxdydz$$

Momentos de Inercia

Productos de Inercia

**Generalización del teorema de ejes paralelos (Steiner)**

$$I_A = I_C + m [(\mathbf{p}_C^T \mathbf{p}_C) \mathbf{I}_3 - \mathbf{p}_C \mathbf{p}_C^T]$$





# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Método iterativo de Newton-Euler

Para cada eslabón  $i$ , deberemos aplicar las ecuaciones de equilibrio dinámico.

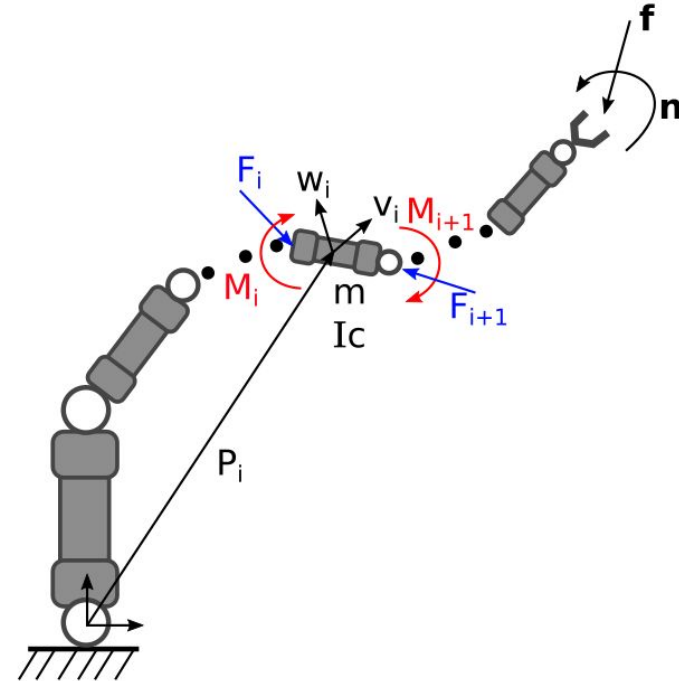
Para escribir el equilibrio dinámico se deben conocer, para cada eslabón:

- Aceleración lineal
- Velocidad angular
- Aceleración angular
- masa
- Tensor de inercias
- Fuerzas externas (si las hay)

Ecuaciones a resolver:

$$m\dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{I}_c\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_c\boldsymbol{\omega} = \mathbf{N}$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

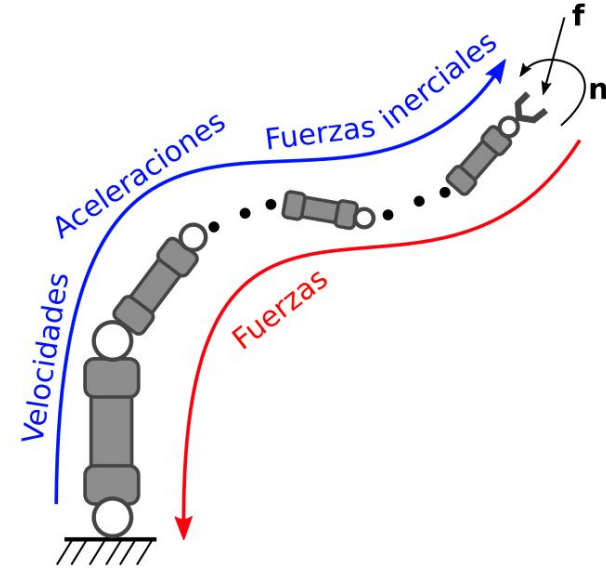
## Método iterativo de Newton-Euler

La formulación de N-E parte del equilibrio de fuerzas y pares para cada elemento  $i$ .

Un correcto desarrollo de las  $2 \cdot n$  ecuaciones, permitirá generar una **formulación recursiva** en la que se obtienen la posición, la velocidad, y la aceleración del elemento  $i$  en función de las del  $(i-1)$  (**outward propagation**).

Para luego obtener las fuerzas y pares actuantes sobre el eslabón  $i$ , en función de los elementos  $(i+1)$  (**inward propagation**).

Esto provoca que la solución que se obtiene a partir de operaciones vectoriales realizando un recorrido “hacia afuera” (outward/forward) y luego “hacia adentro” (inward/backward), alcance un orden de complejidad computacional  $O(n)$ , lo que indica que el número de operaciones es proporcional a la cantidad de GDL.



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Método iterativo de Newton-Euler

**NE1.** Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo a las normas de DH.

**NE2.** Definir las condiciones iniciales:

Para el sistema  $\{S_0\}$

${}^0\omega_0$  : velocidad angular =  $[0, 0, 0]^T$

${}^0\dot{\omega}_0$  : aceleración angular =  $[0, 0, 0]^T$

${}^0v_0$  : velocidad lineal =  $[0, 0, 0]^T$

${}^0\dot{v}_0$  : aceleración lineal =  $-[0, 0, 9.8]^T$

Típicamente cero, pues la base está en reposo

El versor z apunta hacia arriba.

Para todos los sistemas  $\{S_i\}$

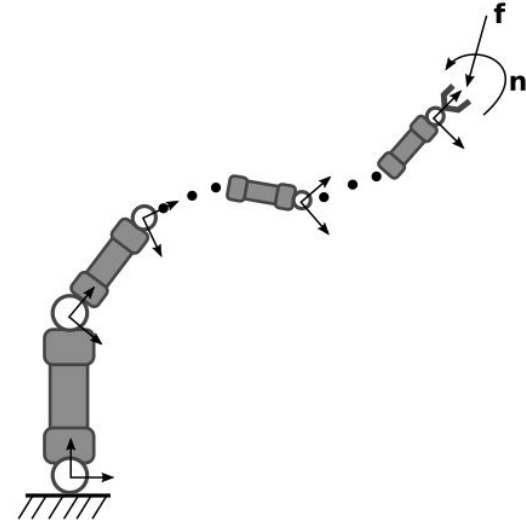
$z_0 = [0, 0, 1]^T$

${}^i p_i$  = Vector desde el origen de  $\{S_{i-1}\}$  hasta el de  $\{S_i\}$  en el sistema  $\{S_i\} = [a_i, d_i \sin(\alpha_i), d_i \cos(\alpha_i)]$

${}^i s_i$  = Coordenadas del centro de masas del eslabón  $i$  respecto del sistema  $\{S_i\}$

${}^i I_i$  = Matriz de inercia del eslabón  $i$  expresado en un sistema paralelo al  $\{S_i\}$  y con el origen en el centro de masas del eslabón

Para el extremo del robot se deben conocer la fuerza y el par ejercidos externamente:

$$\begin{cases} {}^{n+1}f_{n+1} \\ {}^{n+1}n_{n+1} \end{cases}$$


# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Método iterativo de Newton-Euler

NE3. Obtener las matrices de rotación  ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$  y sus inversas  ${}^i\mathbf{R}_{i-1} = ({}^{i-1}\mathbf{R}_i)^{-1} = ({}^{i-1}\mathbf{R}_i)^T$

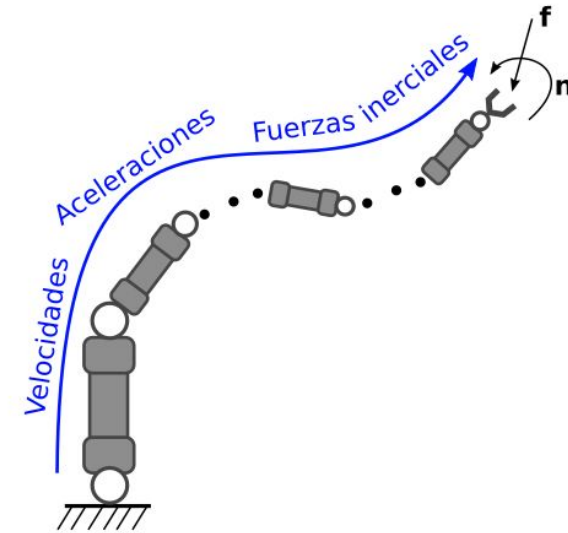
$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i \end{bmatrix}$$

NE4. Calcular la velocidad angular de todos los sistemas  $\{S_i\}$

$${}^i\boldsymbol{\omega}_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left( {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_0 \dot{\mathbf{q}}_i \right) & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$

NE5. Calcular la aceleración angular de todos los sistemas  $\{S_i\}$

$${}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left( {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \mathbf{z}_0 \ddot{\mathbf{q}}_i \right) + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{z}_0 \dot{\mathbf{q}} & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$



Repetir para todos los eslabones en sentido "hacia afuera" ( $i=1\dots n$ )

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Método iterativo de Newton-Euler

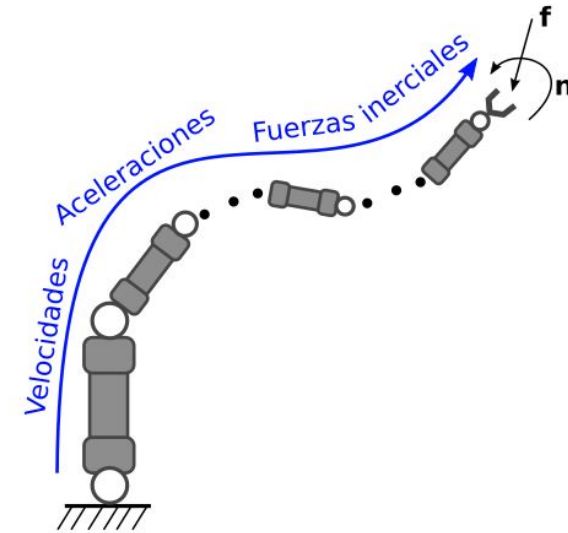
NE6. Calcular la aceleración lineal de todos los sistemas  $\{S_i\}$

$${}^i\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i) + {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} (\mathbf{z}_0 \ddot{\mathbf{q}}_i + {}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1}) + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + 2 {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0 \dot{\mathbf{q}}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i) & \text{si el eslabón } i \text{ es de trasl} \end{cases}$$

NE7. Calcular la aceleración lineal del centro de gravedad de todos los eslabones  $i$

$${}^i\mathbf{a}_i = {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{s}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i) + {}^i\dot{\mathbf{v}}_i$$

Repetir para todos los eslabones  
en sentido "hacia afuera" ( $i=1\dots n$ )



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Método iterativo de Newton-Euler

NE8. Obtener la fuerza ejercida sobre el eslabón  $i$ :

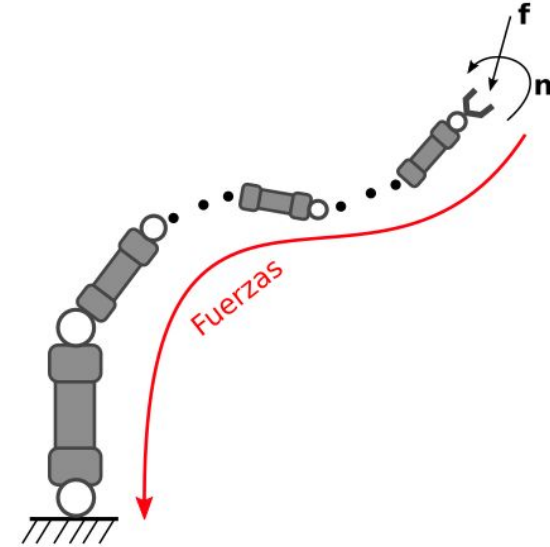
$${}^i\mathbf{f}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1} {}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} + m_i {}^i\mathbf{a}_i$$

NE9. Calcular el par ejercido sobre cada eslabón  $i$ .

$${}^i\mathbf{n}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1} \left[ {}^{i+1}\mathbf{n}_{i+1} + \left( {}^{i+1}\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{p}_i \right) \times {}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} \right] + \left( {}^i\mathbf{p}_i + {}^i\mathbf{s}_i \right) \times m_i {}^i\mathbf{a}_i + {}^i\mathbf{I}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times \left( {}^i\mathbf{I}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i \right)$$

NE10. Calcular la fuerza o par aplicado a la articulación  $i$

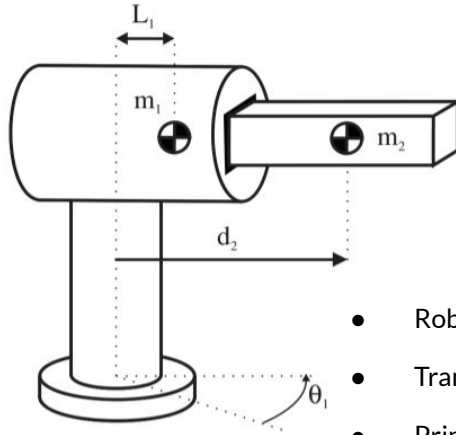
$$\tau_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{n}_i^T {}^i\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0 & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{f}_i^T {}^i\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0 & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$



Repetir para todos los eslabones  
en sentido "hacia adentro"  
( $i=n \dots 1$ )

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

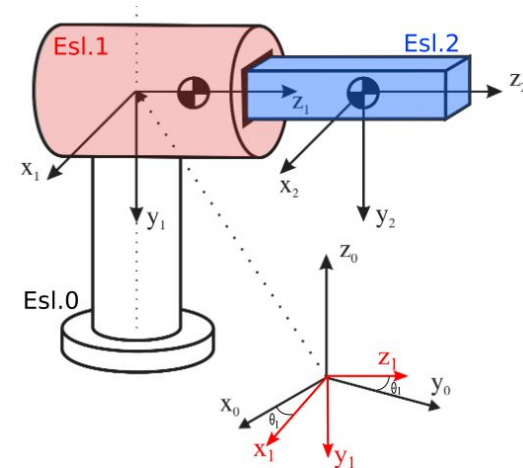
## Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler



- Robot con eslabones rígidos
- Tramo recto vertical fijo
- Primer articulación: de rotación
- Segunda articulación: de traslación
- Peso  $m_1$  a una distancia  $L_1$
- Peso  $m_2$  a una distancia  $d_2$

NE1. Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo a las normas de DH.

| Articulación | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|------------|
| 1            | $\theta_1$ | 0     | 0     | -90        |
| 2            | 0          | $d_2$ | 0     | 0          |



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE2. Definir las condiciones iniciales:

Para el sistema  $\{S_0\}$

velocidad angular =  $[0, 0, 0]^T$   
 aceleración angular =  $[0, 0, 0]^T$   
 velocidad lineal =  $[0, 0, 0]^T$   
 aceleración lineal =  $-[0, 0, 9.8]$

$$z_0 = [0, 0, 1]^T$$

Para todos los sistemas  $\{S_1 \text{ y } S_2\}$

$${}^1p_1 = [0, 0, 0]^T \quad {}^2p_2 = [0, 0, d_2]^T$$

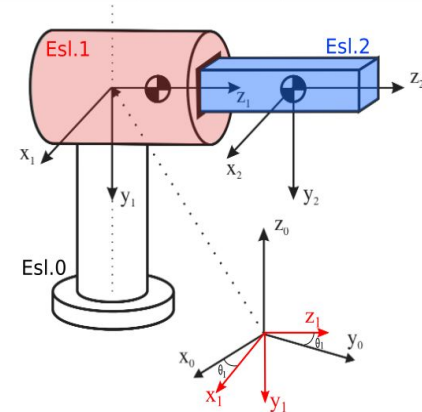
$${}^1s_1 = [0, 0, L_1] \quad {}^2s_2 = [0, 0, 0]$$

$${}^1I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^2I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{acumulada en el CM}$$

como no se ejercen fuerzas externas en el extremo del robot:

$${}^3f_3 = {}^3n_3 = 0$$

| Articulación | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|------------|
| 1            | $\theta_1$ | 0     | 0     | -90        |
| 2            | 0          | $d_2$ | 0     | 0          |



${}^i p_i$  = de origen  $\{S_{i-1}\}$  al  $\{S_i\}$  en el sist.  $\{S_i\} = [a_i, d_i \sin(\alpha_i), d_i \cos(\alpha_i)]$

${}^i s_i$  = Coord. del CM de  $i$  en el sist.  $\{S_i\}$

${}^i I_i$  = Matriz de  $i$  en un sist. // al  $\{S_i\}$  y con origen en el CM de  $i$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE3. Obtener las matrices de rotación  ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$  y sus inversas  ${}^i\mathbf{R}_{i-1} = ({}^{i-1}\mathbf{R}_i)^{-1} = ({}^{i-1}\mathbf{R}_i)^T$

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

NE4. Calcular la velocidad angular de todos los sistemas  $\{S_i\}$

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = {}^1\mathbf{R}_0 ({}^0\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{z}_0 \dot{\theta}_1) = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = {}^2\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Articulación | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|------------|
| 1            | $\theta_1$ | 0     | 0     | -90        |
| 2            | 0          | $d_2$ | 0     | 0          |

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i \end{bmatrix}$$

$${}^i\boldsymbol{\omega}_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1} ({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_0 \dot{\mathbf{q}}_i) & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$

$$\mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE5. Calcular la aceleración angular de todos los sistemas  $\{S_i\}$

$${}^1\dot{\omega}_1 = {}^1R_0 \left( {}^0\dot{\omega}_0 + z_0 \ddot{\theta}_1 \right) + {}^0\omega_0 \times z_0 \dot{\theta}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = {}^2R_1 {}^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

| Articulación | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|------------|
| 1            | $\theta_1$ | 0     | 0     | -90        |
| 2            | 0          | $d_2$ | 0     | 0          |

$${}^i\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1} \left( {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + z_0 \ddot{q}_i \right) + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times z_0 \dot{q}_i & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases}$$

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^1R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0R_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = [0, 0, 1]^T \quad {}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE6. Calcular la aceleración lineal de todos los sistemas  $\{S_i\}$

$$\begin{aligned}
 {}^1\dot{\mathbf{v}}_1 &= {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}^1\mathbf{p}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1\mathbf{p}_1) + {}^1\mathbf{R}_0 {}^0\dot{\mathbf{v}}_0 = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}^2\dot{\mathbf{v}}_2 &= {}^2\mathbf{R}_1 (z_0 \ddot{d}_2 + {}^1\dot{\mathbf{v}}_1) + {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{p}_2 + 2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\mathbf{R}_1 z_0 \dot{d}_2) + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{p}_2) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

| Articulación | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|------------|
| 1            | $\theta_1$ | 0     | 0     | -90        |
| 2            | 0          | $d_2$ | 0     | 0          |

$${}^i\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i) + {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1} & \text{rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} (z_0 \ddot{q}_i + {}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1}) + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + 2 {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{R}_{i-1} z_0 \dot{q}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i) & \text{traslación} \end{cases}$$

$${}^1\mathbf{p}_1 = [0, 0, 0]^T \quad {}^2\mathbf{p}_2 = [0, 0, d_2]^T \quad \mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T$$

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE7. Calcular la aceleración lineal del CM de todos los eslabones  $i$

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{a}_1 &= {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}^1\mathbf{s}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1\mathbf{s}_1) + {}^1\dot{\mathbf{v}}_1 = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 \\ -g \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \end{bmatrix} \\
 {}^2\mathbf{a}_2 &= {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2 + {}^1\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) + {}^2\dot{\mathbf{v}}_2 = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

| Articulación | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|------------|
| 1            | $\theta_1$ | 0     | 0     | -90        |
| 2            | 0          | $d_2$ | 0     | 0          |

$${}^i\mathbf{a}_i = {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{s}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i) + {}^i\dot{\mathbf{v}}_i$$

$${}^1\mathbf{s}_1 = [0, 0, L_1] \quad {}^2\mathbf{s}_2 = [0, 0, 0]$$

$${}^1\dot{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\dot{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix}$$

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE8. Obtener la fuerza ejercida sobre el eslabón i:

$${}^2\mathbf{f}_2 = {}^2\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{f}_3 + m_2 {}^2\mathbf{a}_2 = {}^2\mathbf{R}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -gm_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{f}_1 &= {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{f}_2 + m_1 {}^1\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -gm_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 l_1 \\ -g \\ -\dot{\theta}_1^2 l_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 - \ddot{\theta}_1 l_1 m_1 \\ -g(m_1 + m_2) \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 l_1 m_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

| Articulación | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|------------|
| 1            | $\theta_1$ | 0     | 0     | -90        |
| 2            | 0          | $d_2$ | 0     | 0          |

$${}^i\mathbf{f}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1} {}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} + m_i {}^i\mathbf{a}_i$$

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 \\ -g \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE9. Calcular el par ejercido sobre cada eslabón  $i$ .

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{n}_2 &= {}^2\mathbf{R}_3 \left[ {}^3\mathbf{n}_3 + ({}^3\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p}_2) \times {}^3\mathbf{f}_3 \right] + ({}^2\mathbf{p}_2 + {}^2\mathbf{s}_2) \times m_2 {}^2\mathbf{a}_2 + {}^2\mathbf{I}_2 {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\mathbf{I}_2 \cdot {}^2\boldsymbol{\omega}_2) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times m_2 \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

| Articulación | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|------------|
| 1            | $\theta_1$ | 0     | 0     | -90        |
| 2            | 0          | $d_2$ | 0     | 0          |

$${}^i\mathbf{n}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1} \left[ {}^{i+1}\mathbf{n}_{i+1} + ({}^{i+1}\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{p}_i) \times {}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} \right] + ({}^i\mathbf{p}_i + {}^i\mathbf{s}_i) \times m_i {}^i\mathbf{a}_i + {}^i\mathbf{I}_i {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\mathbf{I}_i \cdot {}^i\boldsymbol{\omega}_i)$$

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} \quad {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3\mathbf{f}_3 = {}^3\mathbf{n}_3 = 0$$

$${}^2\mathbf{p}_2 = [0, 0, d_2]^T$$

$${}^2\mathbf{s}_2 = [0, 0, 0]$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE9. Calcular el par ejercido sobre cada eslabón  $i$ .

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{n}_i &= {}^1\mathbf{R}_2 \left[ {}^2\mathbf{n}_2 + ({}^2\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{p}_1) \times {}^2\mathbf{f}_2 \right] + ({}^1\mathbf{p}_1 + {}^1\mathbf{s}_1) \times m_i {}^1\mathbf{a}_1 + {}^1\mathbf{I}_1 {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^1\mathbf{I}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix} + \\
 &+ \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 m_1 \\ -g m_1 \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 m_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 m_1 g \\ -\ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d_2 m_2 + L_1 m_1) g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 - \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

| Articulación | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|------------|
| 1            | $\theta_1$ | 0     | 0     | -90        |
| 2            | 0          | $d_2$ | 0     | 0          |

$${}^i\mathbf{n}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1} \left[ {}^{i+1}\mathbf{n}_{i+1} + ({}^{i+1}\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{p}_i) \times {}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} \right] + ({}^i\mathbf{p}_i + {}^i\mathbf{s}_i) \times m_i {}^i\mathbf{a}_i + {}^i\mathbf{I}_i {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\mathbf{I}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i)$$

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 \\ -g \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix} \quad {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{p}_1 = [0, 0, 0]^T \quad {}^1\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{s}_1 = [0, 0, L_1]$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Método iterativo de Newton-Euler

NE10. Calcular la fuerza o par aplicado a la articulación  $i$

$$F_2 = {}^2\mathbf{f}_2^T {}^2\mathbf{R}_1 \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -gm_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2$$

$$T_1 = {}^1\mathbf{n}_1^T {}^1\mathbf{R}_0 \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} (d_2 m_2 + L_1 m_1) g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 - \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ = (\ddot{\theta}_1 d_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 + \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1$$

$$\mathbf{T}_1 = (\ddot{\theta}_1 d_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 + \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2$$

| Articulación | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|------------|
| 1            | $\theta_1$ | 0     | 0     | -90        |
| 2            | 0          | $d_2$ | 0     | 0          |

$$\tau_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{n}_i^T {}^i\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0 & \text{si el eslabón } i \text{ es de rotación} \\ {}^i\mathbf{f}_i^T {}^i\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0 & \text{si el eslabón } i \text{ es de traslación} \end{cases} \quad \mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T$$

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -gm_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 - \ddot{\theta}_1 l_1 m_1 \\ -g(m_1 + m_2) \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 l_1 m_1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} (d_2 m_2 + L_1 m_1) g \\ (-\ddot{\theta}_1 d_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 d_2) m_2 - \ddot{\theta}_1 L_1^2 m_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



**FIN!**

