Muestreo de señales de tiempo discreto

MUESTREO DE SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

TAMBIÉN PODEMOS TOMAR MUESTRAS DE SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO, Y VALEN RESULTADOS COMO EL TEOREMA DEL MUESTREO. ESTO NOS LLEVA A TEMAS COMO EL SUBMUESTREO O SOBREMUESTREO DE SECUENCIAS: IMÁGENES, AUDIO, ...

SEA $x[n]$ UNA SECUENCIA DE TIEMPO DISCRETO

TOMAREMOS MUESTRAS CON UN PERÍODO DE MUESTREO N (UNA DE CADA N MUESTRAS).

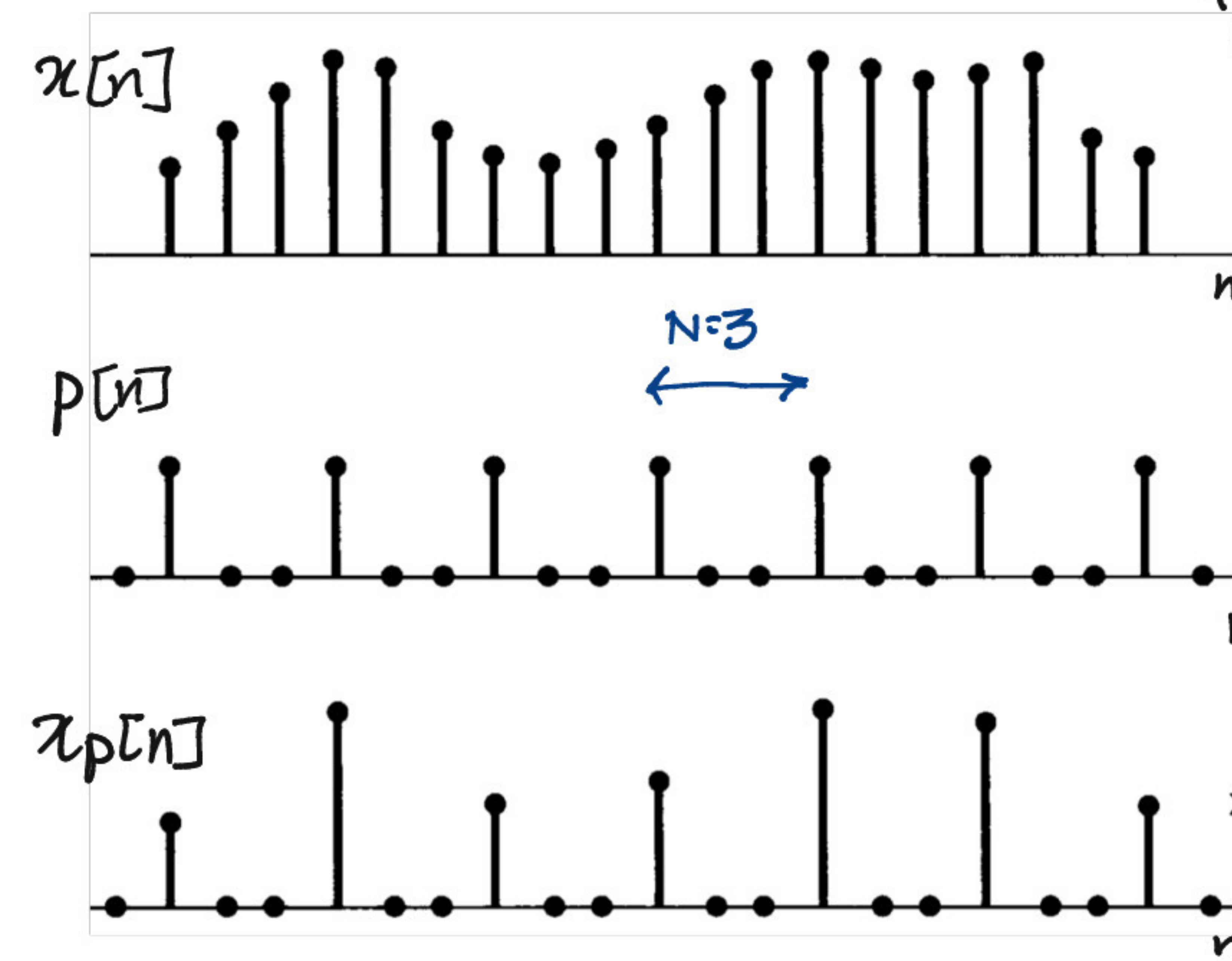
$$x[n] \longrightarrow \otimes \longrightarrow x_p[n]$$

$$p[n] = \sum_k \delta[n-kN]$$

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & n = kN \\ 0, & n \neq kN \end{cases}$$

$$x_p[n] = x[n]\,p[n] = \sum_k x[kN]\,\delta[n-kN]$$

Fig. 7.31



$$X_p(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} P(e^{j\lambda})\,X(e^{j(\theta-\lambda)})\,d\lambda$$

$$P(e^{j\theta}) = \frac{2\pi}{N}\sum_k \delta(\theta - k\theta_s) \qquad \theta_s = \frac{2\pi}{N}$$

$$X_p(e^{j\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j(\theta-k\theta_s)}\right)$$

¿CÓMO SE VE EN EL ESPECTRO?

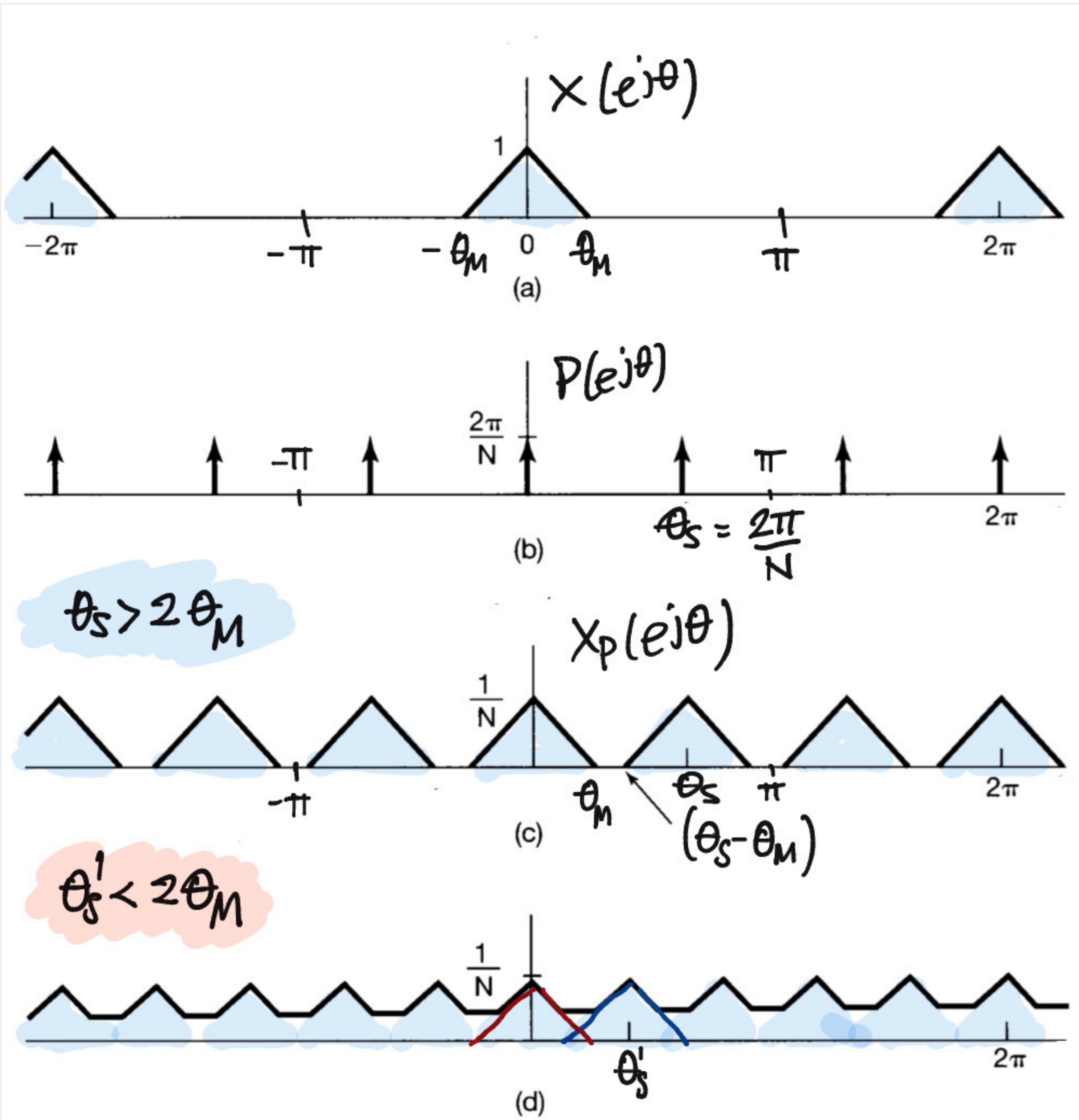


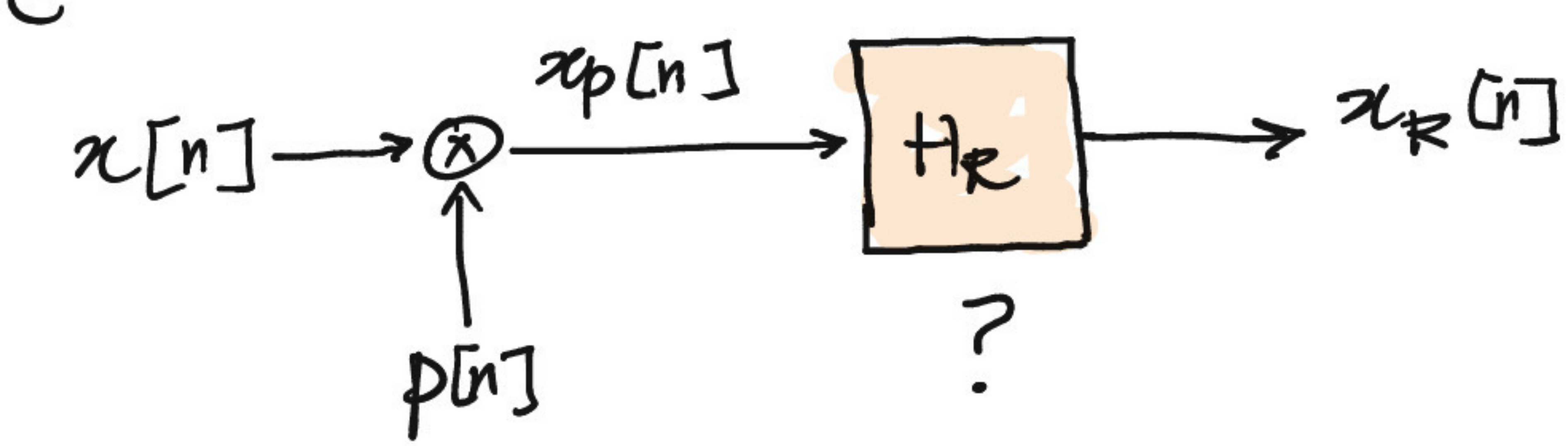
Fig. 7.32

$$X_p(e^{j\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j(\theta - k\theta_s)}\right)$$

SE PLANTEAN LAS MISMAS IDEAS QUE EN LA DEMONSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL MUESTREO. RELACIONANDO EN ESTE CASO FRECUENCIA DE MUESTREO CON EL ANCHO DE BANDA, θ_M

$$\theta_s = \frac{2\pi}{N} > 2\theta_M$$

¿Y LA RECONSTRUCCIÓN?



¿CÓMO RECUPERAMOS $x[n]$?

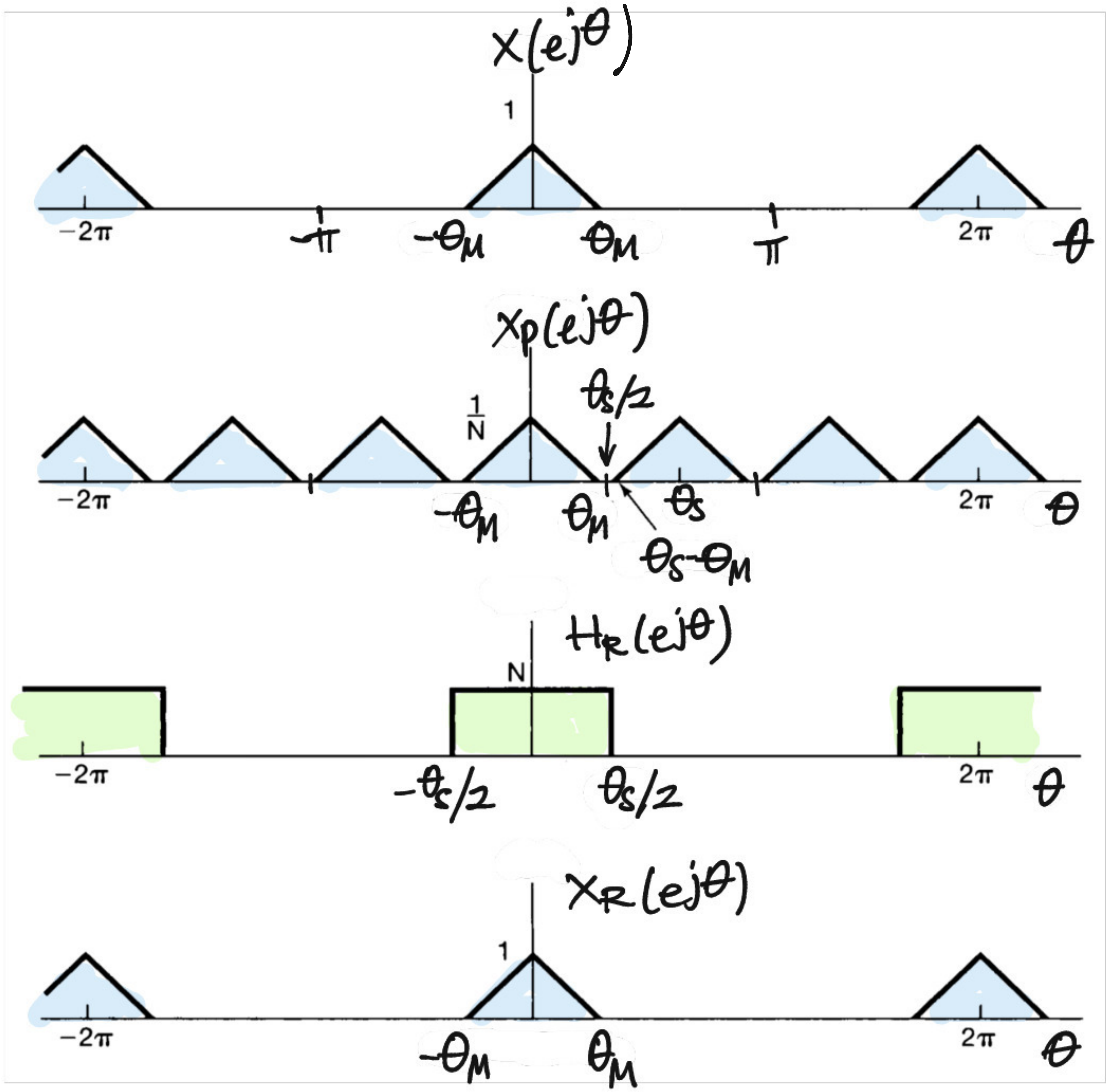


Fig. 7.33

LA RECONSTRUCCIÓN TAMBIÉN SE PLANTEA COMO EL FILTRADO $H_R(e^{j\theta})$ PASABAJOS CON FRECUENCIA DE CORTE $\theta_c = \theta_s/2 = \pi/N$ Y GANANCIA N.

(VER LA SIMILITUD CON EL CASO DE TIEMPO CONTINUO)

ESTE PASABAJOS PLANTEA EN EL TIEMPO UNA CONVOLUCIÓN CON

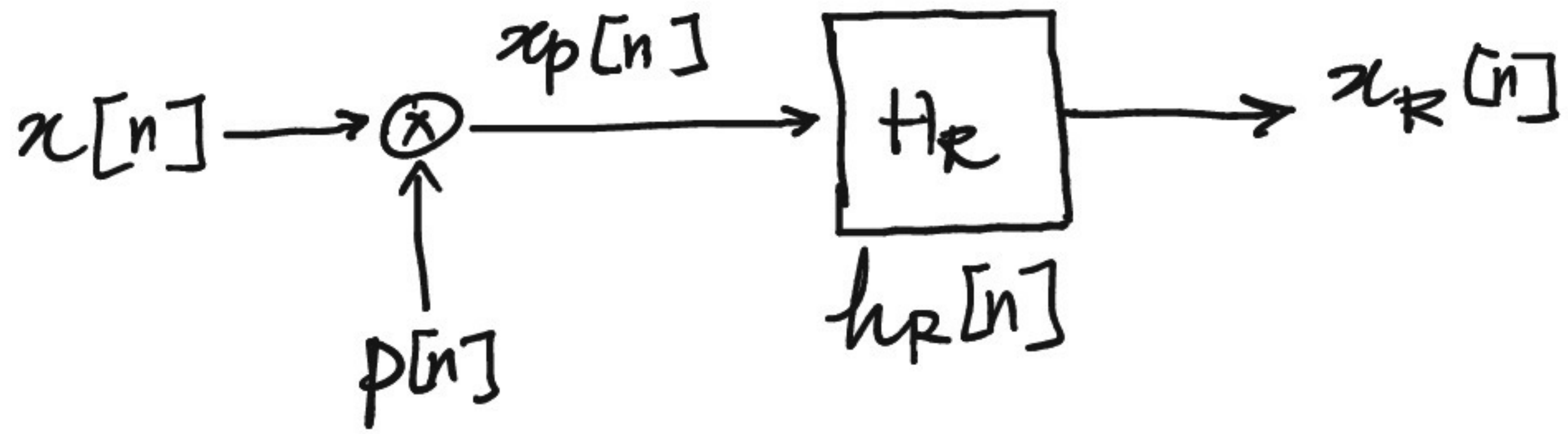
$$h_R[n] = N\frac{\theta_c}{\pi}\frac{\sin(\theta_c n)}{\theta_c n} = N\frac{\theta_c}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\theta_c n}{\pi}\right)$$

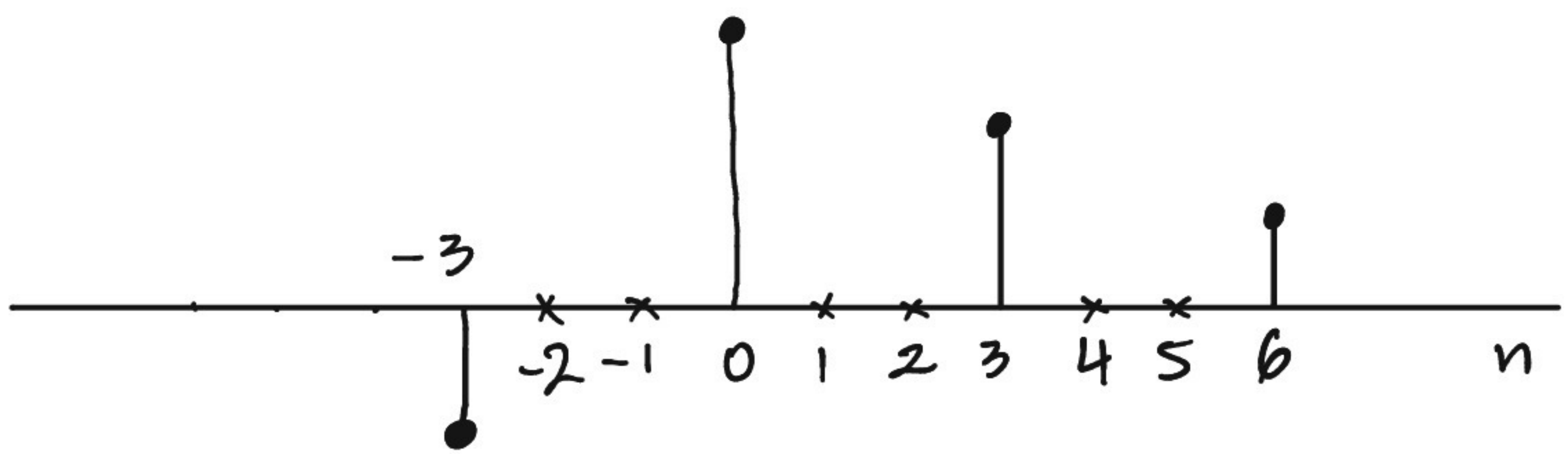
CON $\theta_c = \theta_s/2 = \pi/N$ $\quad h_R[n] = \operatorname{sinc}(n/N)$

$$x_R[n] = x_p[n] * h_R[n]$$

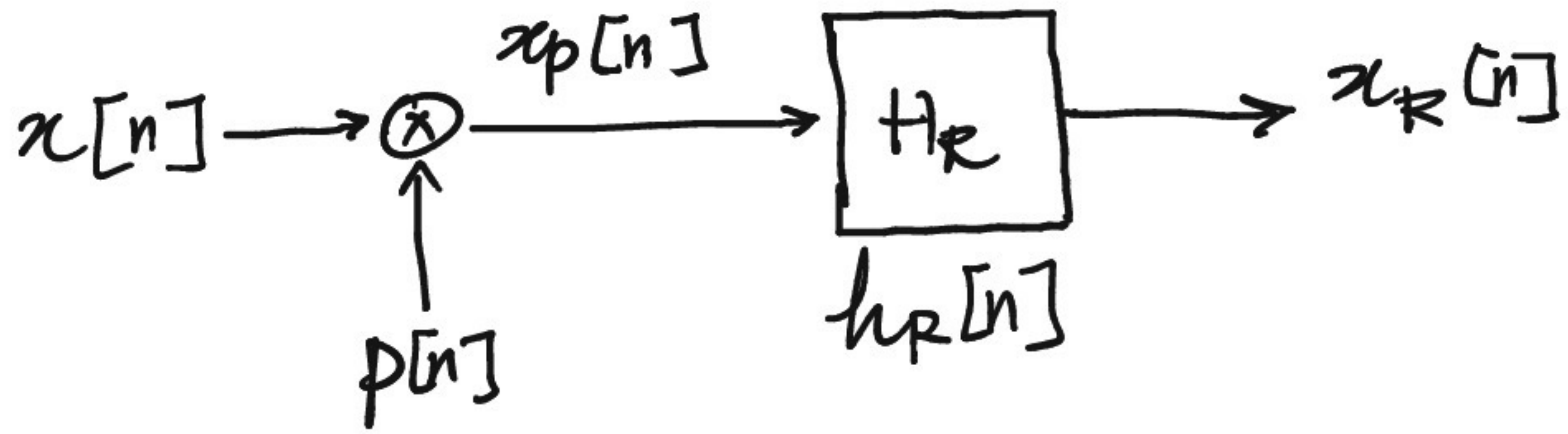
$$= \sum_k x[kN]\,\overbrace{\operatorname{sinc}\left(\frac{n-kN}{N}\right)}^{h_R[n-kN]}$$

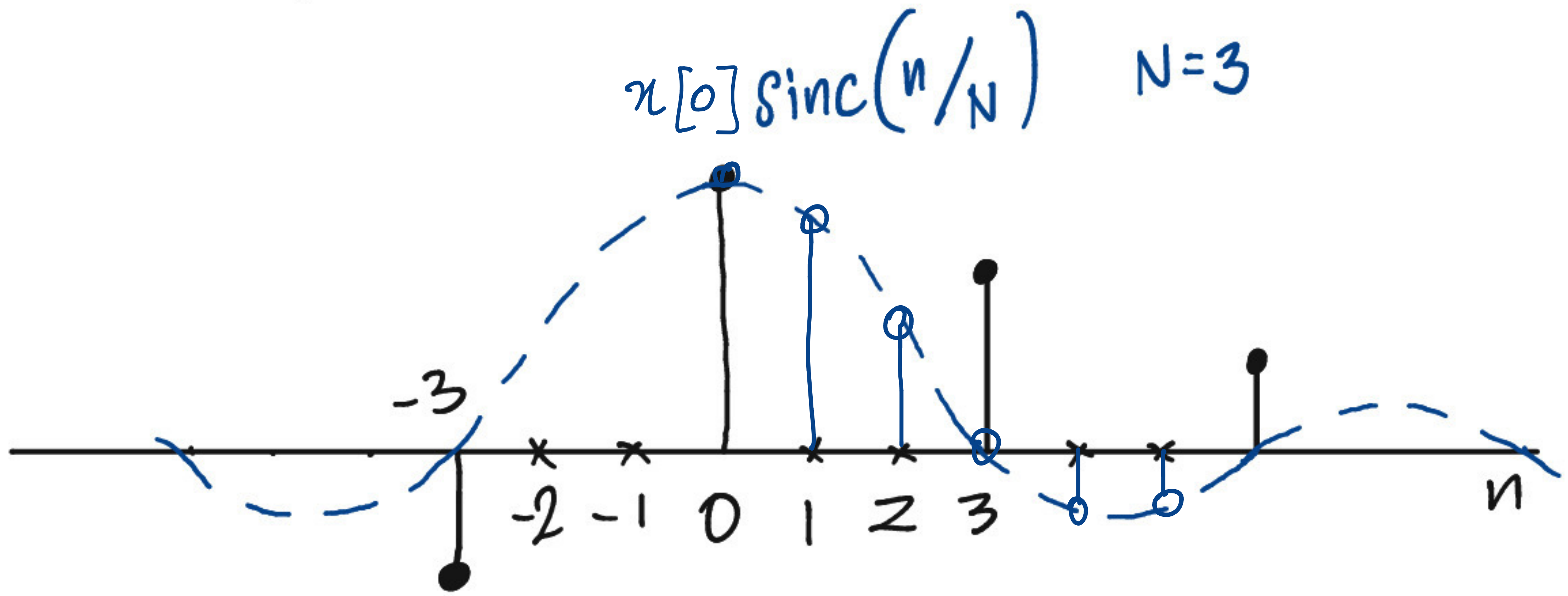
IGUAL QUE EN EL ANÁLISIS EN TIEMPO CONTINUO TENEMOS OTROS FILTROS DE INTERPOLACIÓN $h_R[n]$.



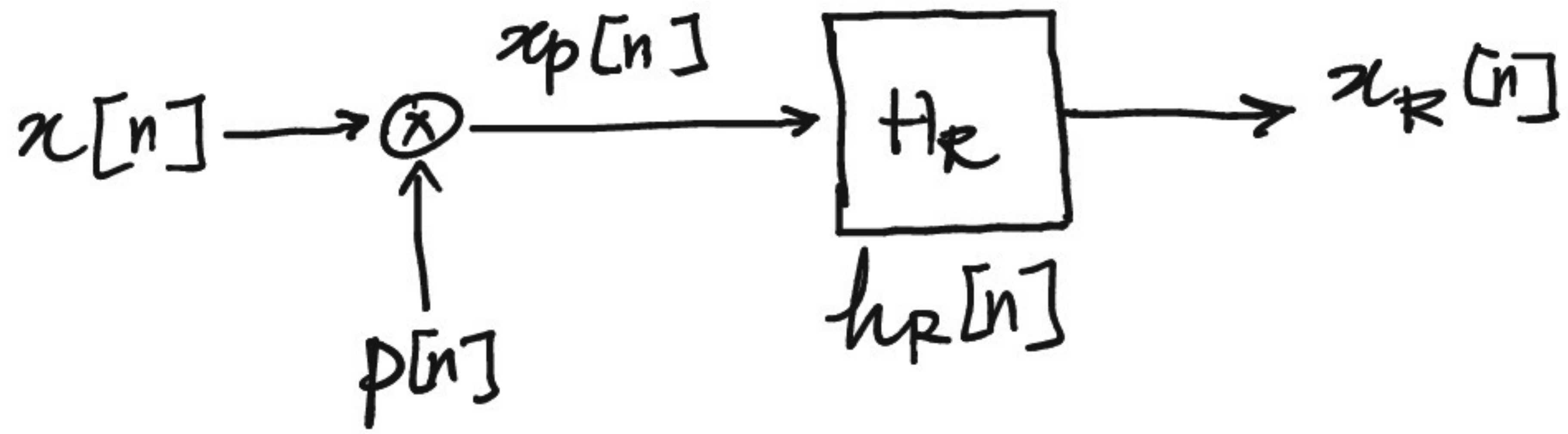


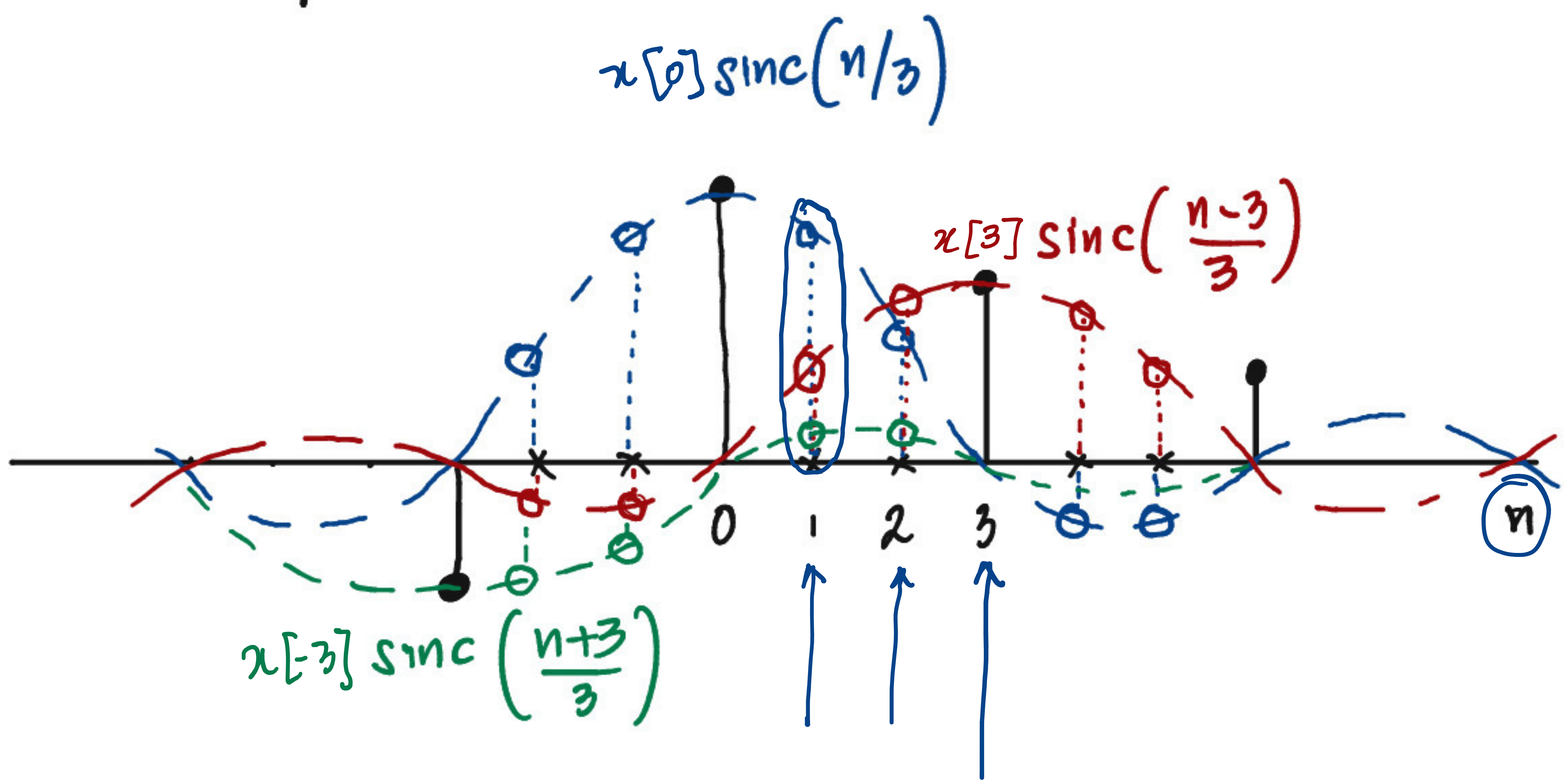
EJEMPLO DE INTERPOLACIÓN IDEAL PARA RECONSTRUCCIÓN DE SEÑAL DE TIEMPO DISCRETO A PARTIR DE SUS MUESTRAS.



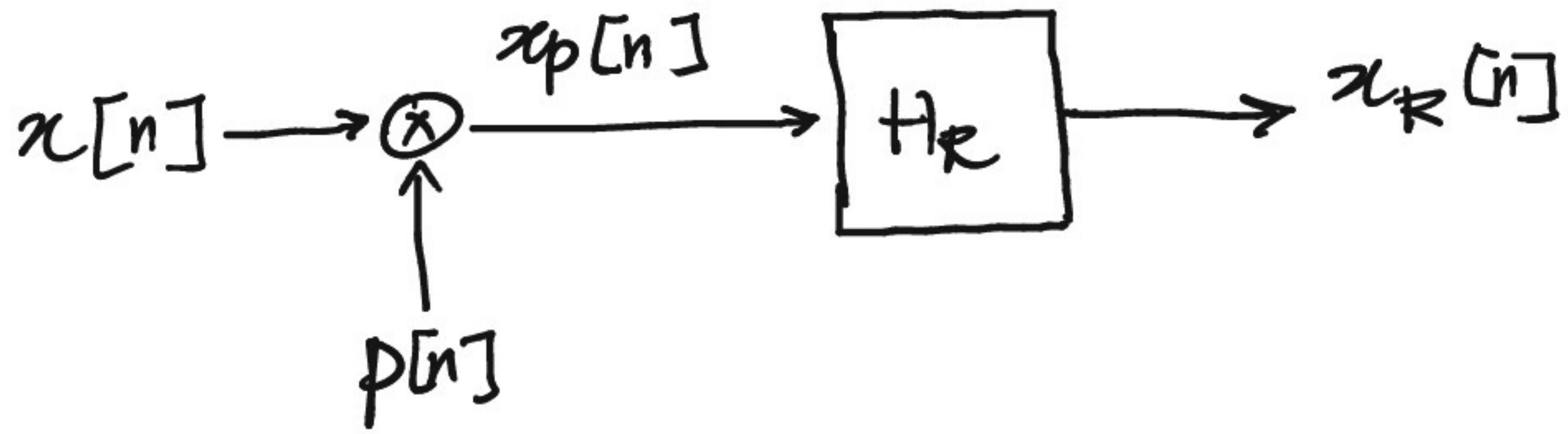


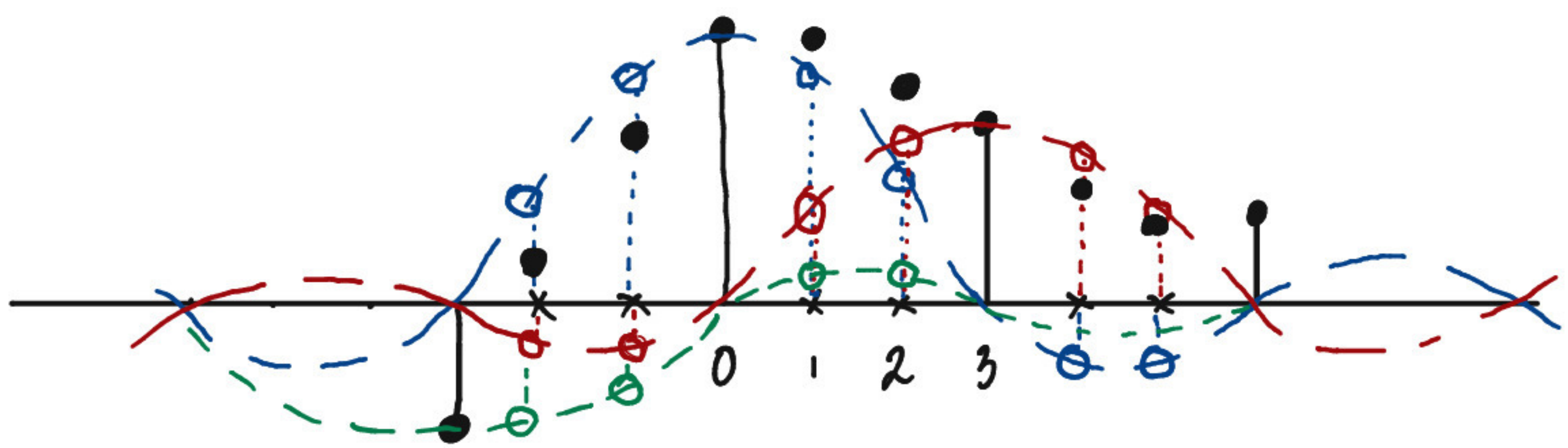
EJEMPLO DE INTERPOLACIÓN IDEAL PARA RECONSTRUCCIÓN DE SEÑAL DE TIEMPO DISCRETO A PARTIR DE SUS MUESTRAS.

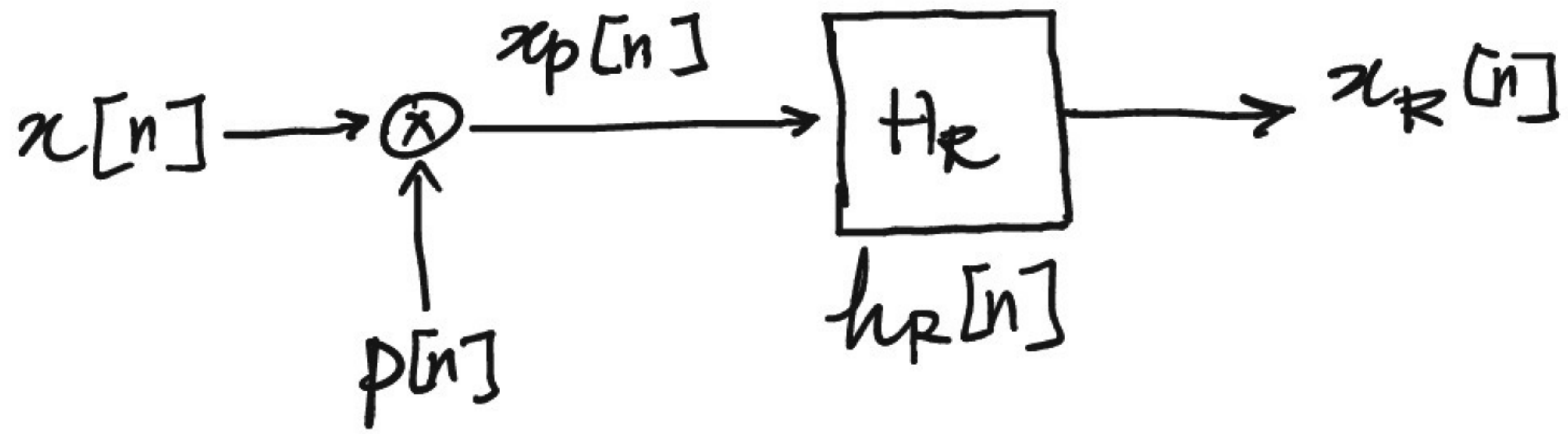




EJEMPLO DE INTERPOLACIÓN IDEAL PARA RECONSTRUCCIÓN DE SEÑAL DE TIEMPO DISCRETO A PARTIR DE SUS MUESTRAS.


x[n]
p[n]
xp[n]
H_R
x_R[n]


0
1
2
3



EJEMPLO DE INTERPOLACIÓN IDEAL PARA RECONSTRUCCIÓN DE SEÑAL DE TIEMPO DISCRETO A PARTIR DE SUS MUESTRAS.

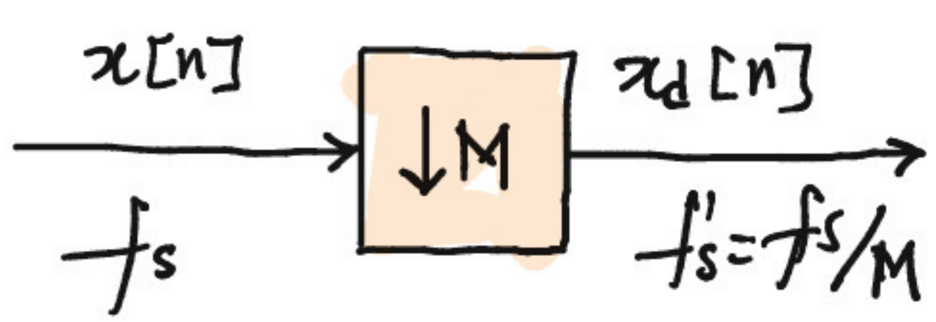
Cambio de frecuencia de muestreo

CAMBIO DE FRECUENCIA DE MUESTREO

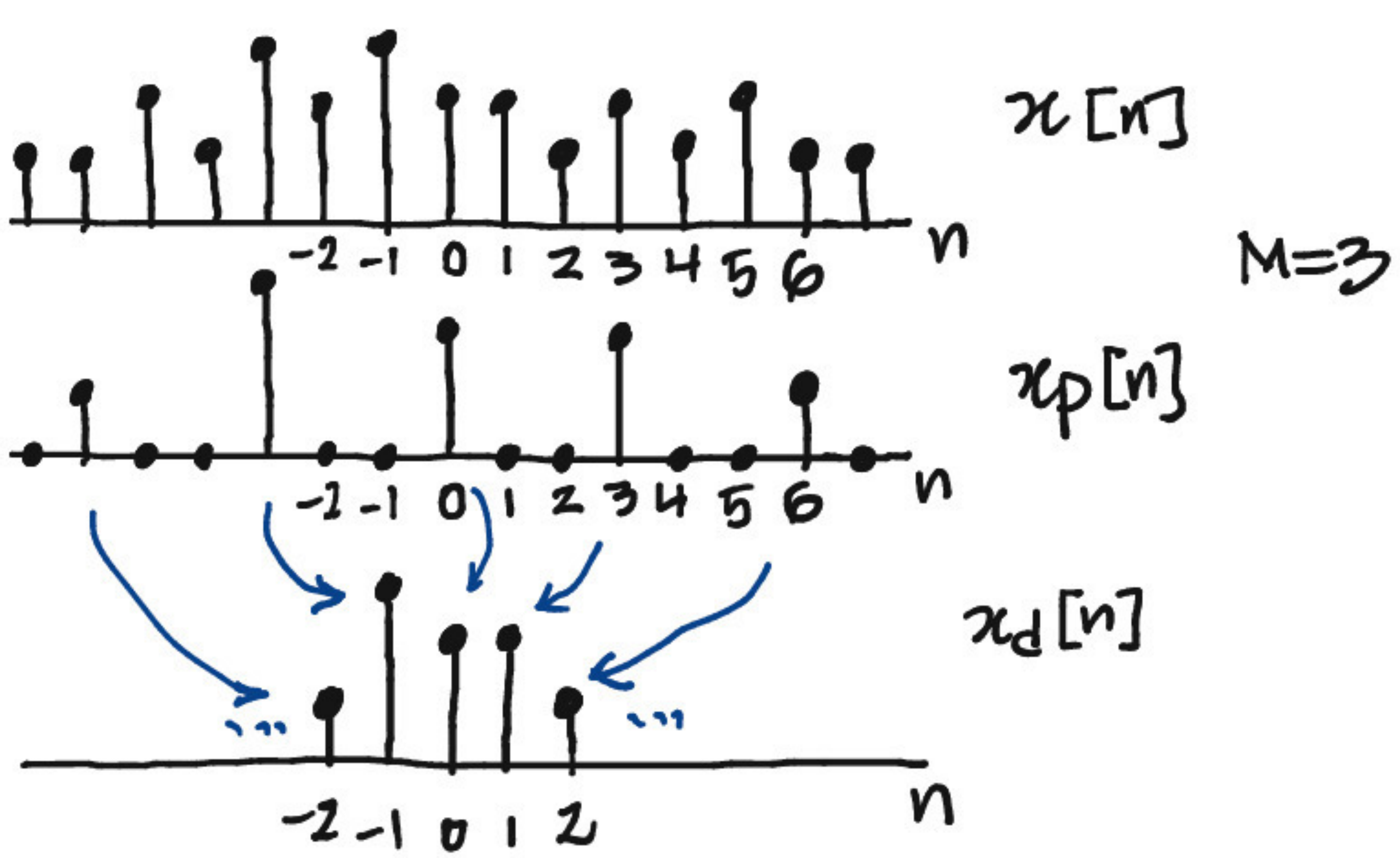
EL CAMBIO DE FRECUENCIA DE MUESTREO ES UNA HERRAMIENTA FUNDAMENTAL EN MUCHOS ASPECTOS DEL PROCESAMIENTO DE SEÑALES, CAMBIAR EL TAMAÑO DE UNA IMAGEN DIGITAL, CAMBIAR LA FRECUENCIA DE MUESTREO DE UN ARCHIVO DE AUDIO (8 kHz A 48 kHz),... Y NO QUEREMOS/PODEMOS RECONSTRUIR LA SEÑAL DE TIEMPO CONTINUO, PARA LUEGO VOLVER A MUESTREARLA. LO RESOLVEMOS CON PROCESAMIENTO DE SEÑALES DIGITALES (EN TIEMPO DISCRETO)

COMPRESOR / DECIMADOR (M)

(Se queda con una de cada M muestras)



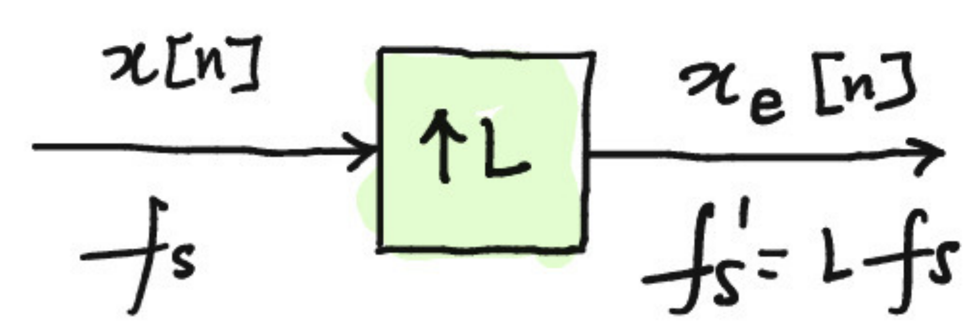
$x_d[n] = x[nM]$



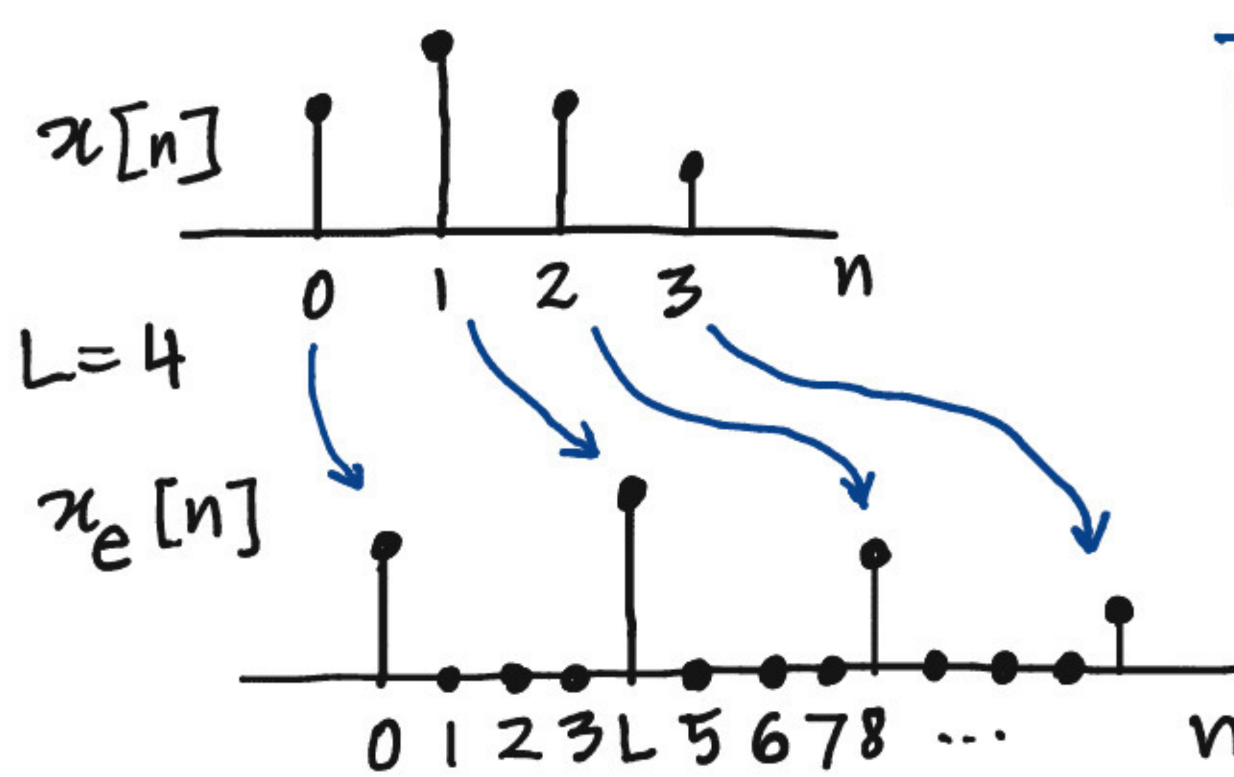
NO ES INVARIANTE TEMPORAL, SI ES LINEAL Y ESTABLE

EXPANSOR / INTERPOLADOR (L)

(Agrega L-1 ceros entre muestras)



$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = kL \\ 0, & n \neq kL \end{cases}$$



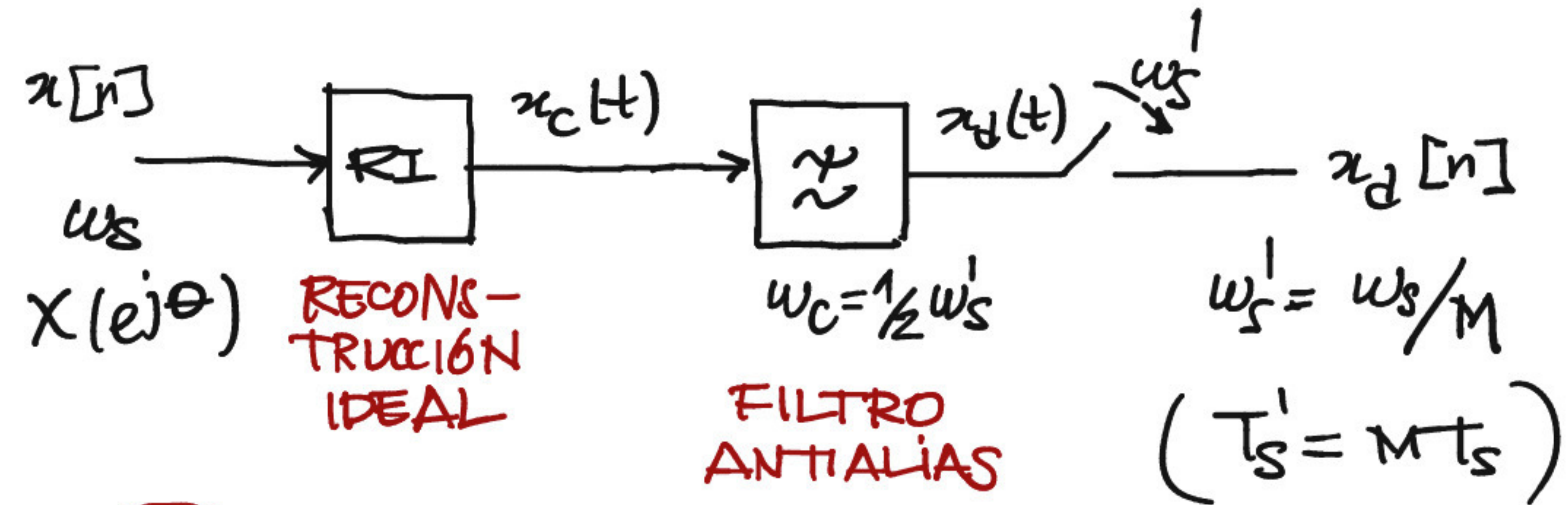
DE OTRA FORMA

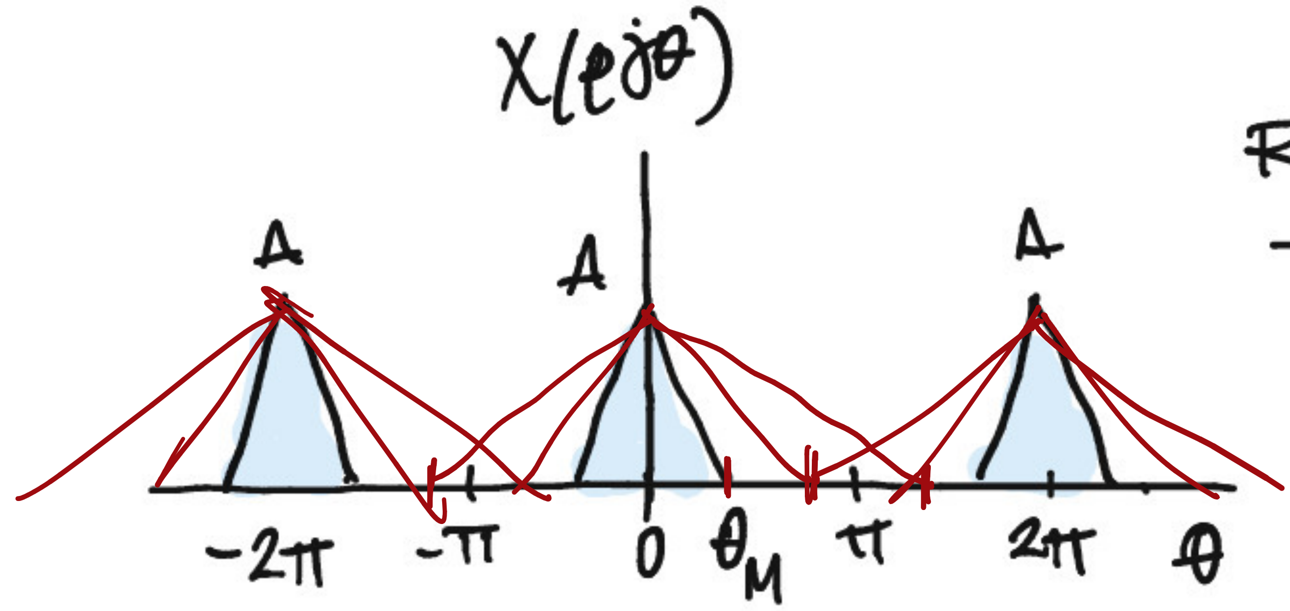
$x_e[kL] = x[k]$

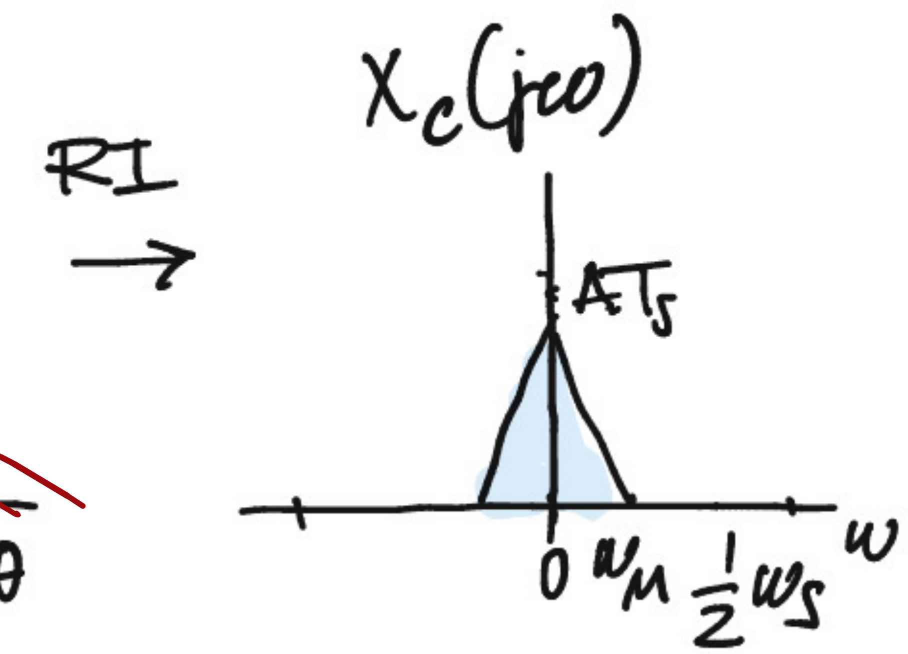
CON $k \in \mathbb{Z}$ O SINO VALE $x_e[\cdot] = 0$

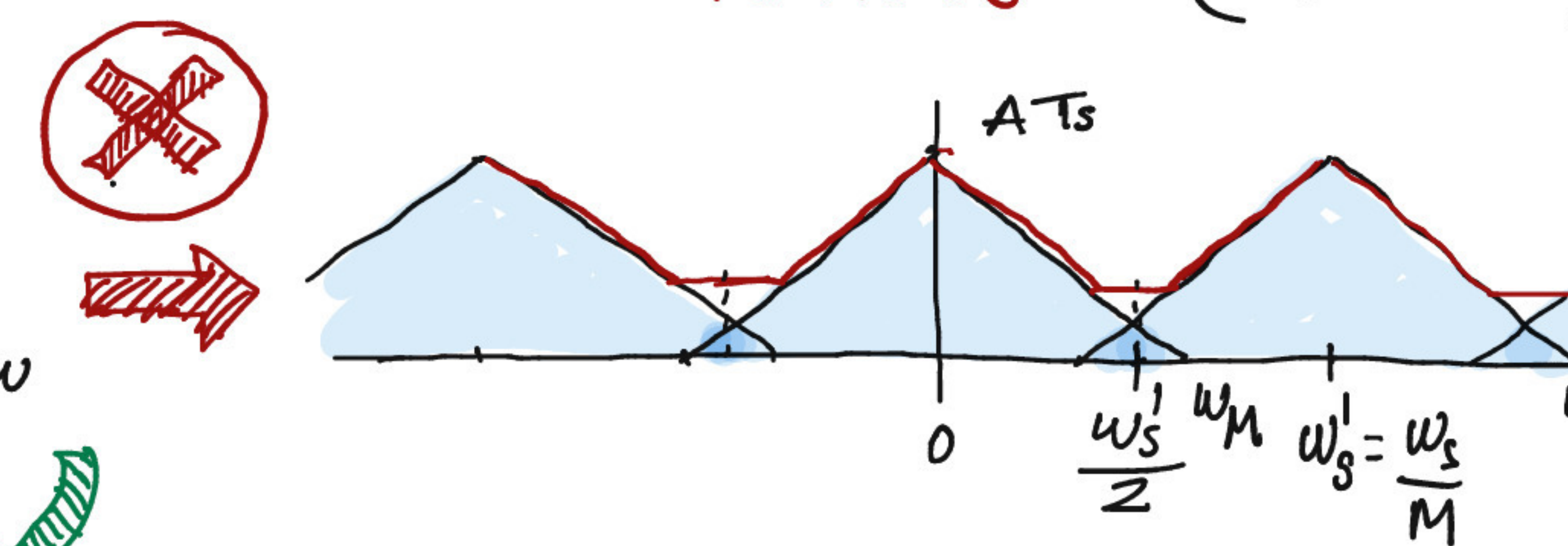
REDUCCIÓN DE LA FRECUENCIA DE MUESTREO POR UN FACTOR ENTERO M

Para entender el procesamiento veamos un modelo basado en la reconstrucción de la señal a tiempo continuo.



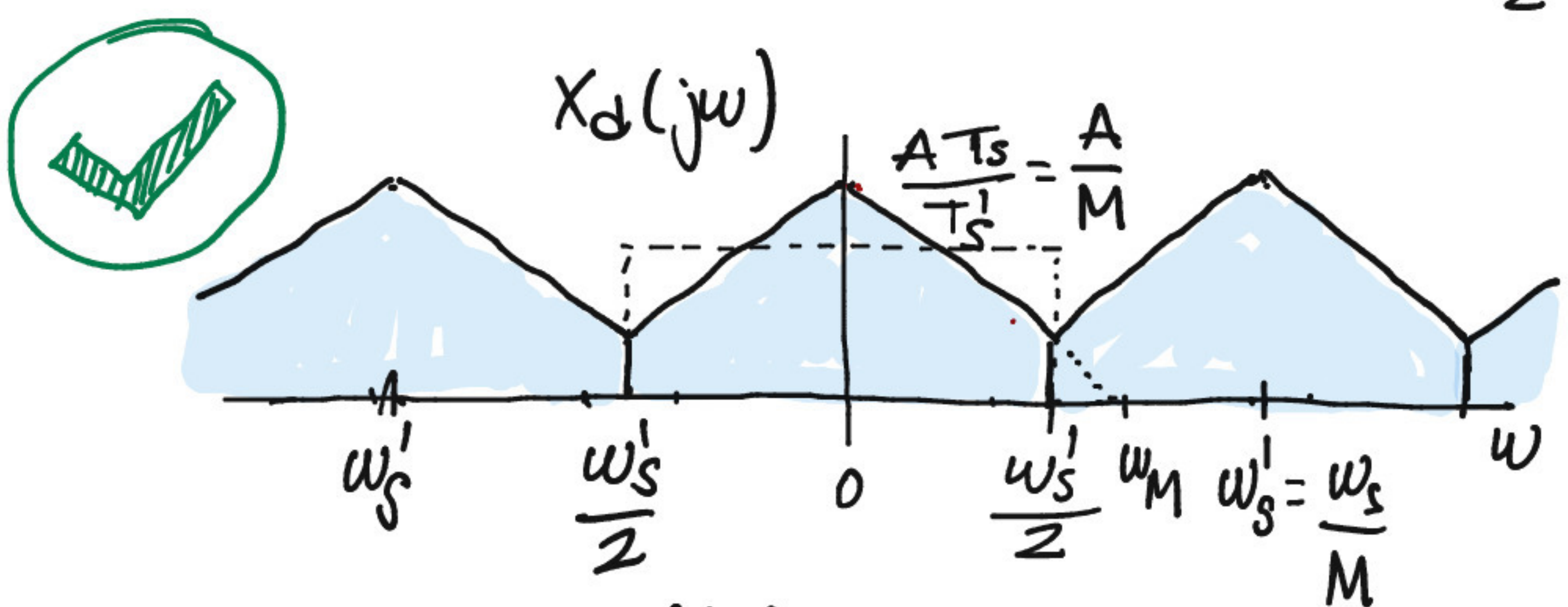




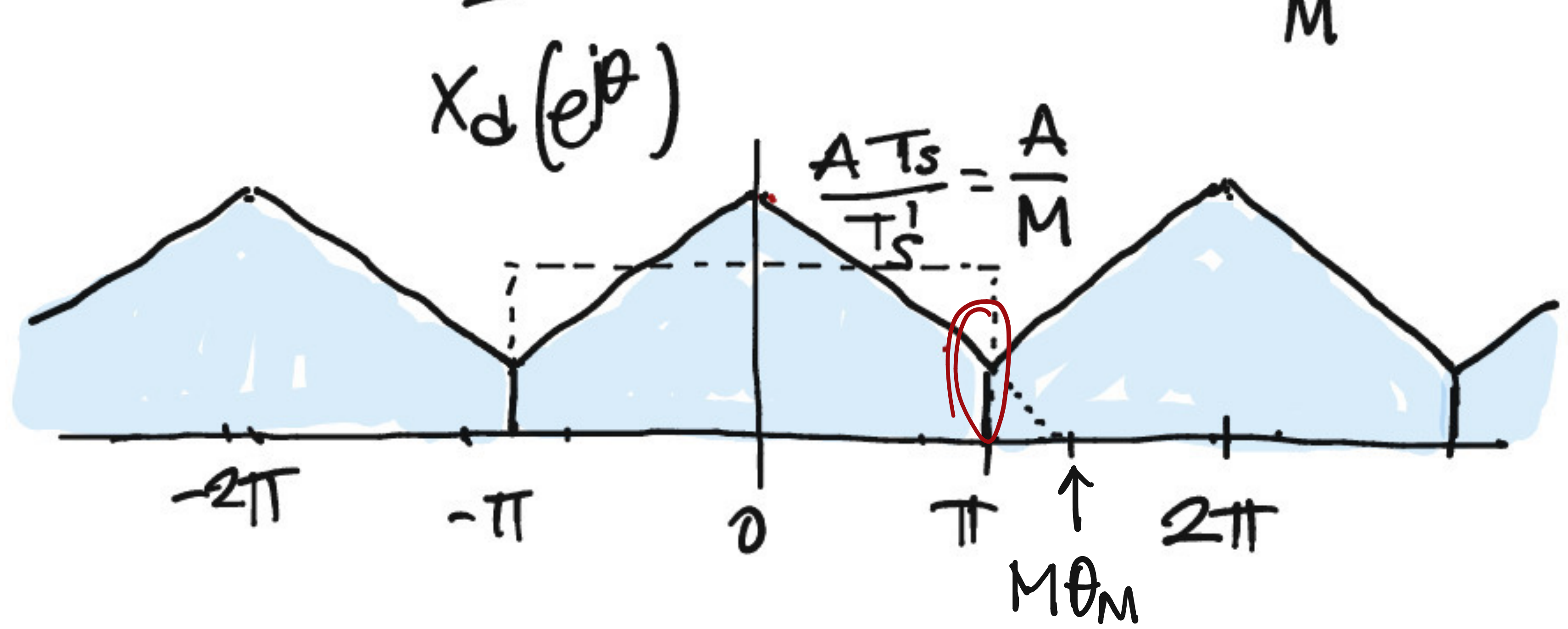


EN ESTE CASO, AL REDUCIR LA FRECUENCIA DE MUESTREO M VECES PUEDE HABER SOLAPAMIENTO Y NO OBTENER LA RECONSTRUCCIÓN CORRECTA. DEBEMOS FILTRAR PASABAJOS (ANTIALIAS) ANTES DE MUESTREAR A $\omega_s' = \omega_s/M$,

LUEGO DE LPF, $\omega_c = \frac{\omega_s'}{2}$



MUESTREO A $\omega_s' = \omega_s/M$



ES FUNDAMENTAL EL FILTRADO PASABAJO ANTES DE MUESTREAR. ATENCIÓN: PUEDE SER QUE SE PIERDA INFORMACIÓN DE LA SEÑAL SI $\omega_M > \frac{1}{2}\omega_s'$, COMO EN EL ÚLTIMO EJEMPLO SIN EMBARGO ESO ES UNA CUESTIÓN DE DISEÑO AL USAR ESA ω_s', PERO SI NO SE HACE EL FILTRADO PASABAJOS ES PEOR PUES "SE INVENTA" INFORMACIÓN EN FRECUENCIAS ENTRE $\frac{\omega_s'}{2} - \omega_M$ Y $\omega_s'/2$.

VEAMOS LA RELACIÓN ANALÍTICA ENTRE LOS ESPECTROS.

$$x_d[n] = x_p[nM] = x[nM]$$

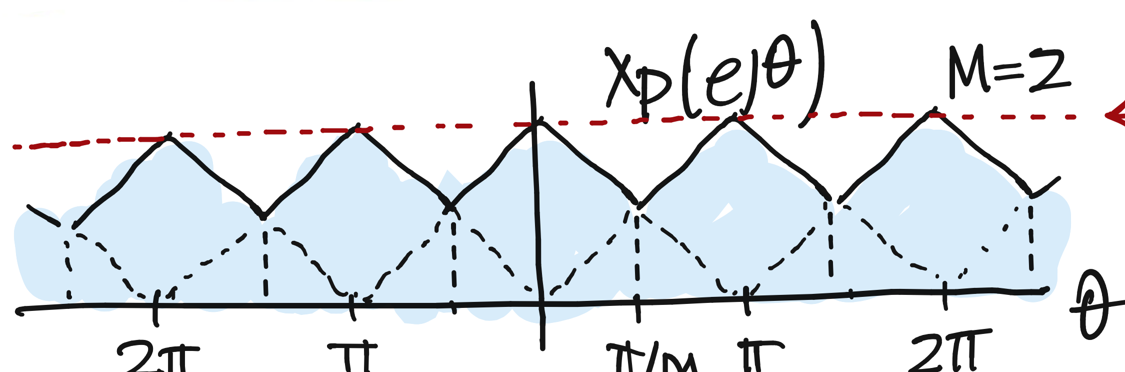
$$X_d(e^{j\theta}) = \sum_k x_d[k]\, e^{-jk\theta} = \sum_k x_p[kM]\, e^{-jk\theta} =$$

n=kM

$$= \sum_{n=kM} x_p[n]\, e^{-j\frac{n\theta}{M}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n]\, e^{-j\frac{n}{M}\theta}$$

$x_p[\ell]=0,\ \ell \neq kM$

$$\boxed{X_d(e^{j\theta}) = X_p(e^{j\theta/M})}$$

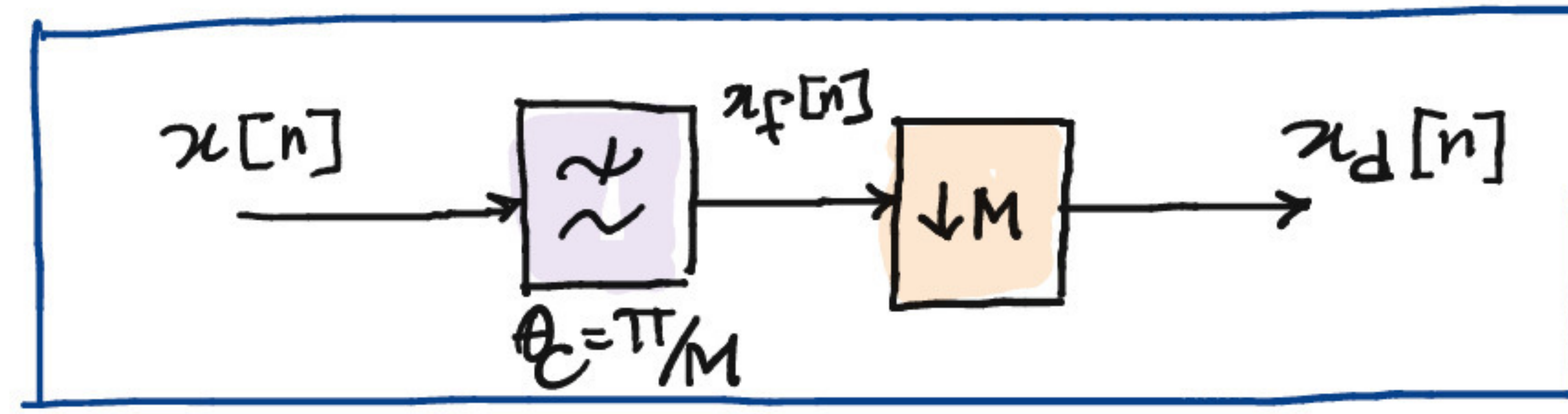


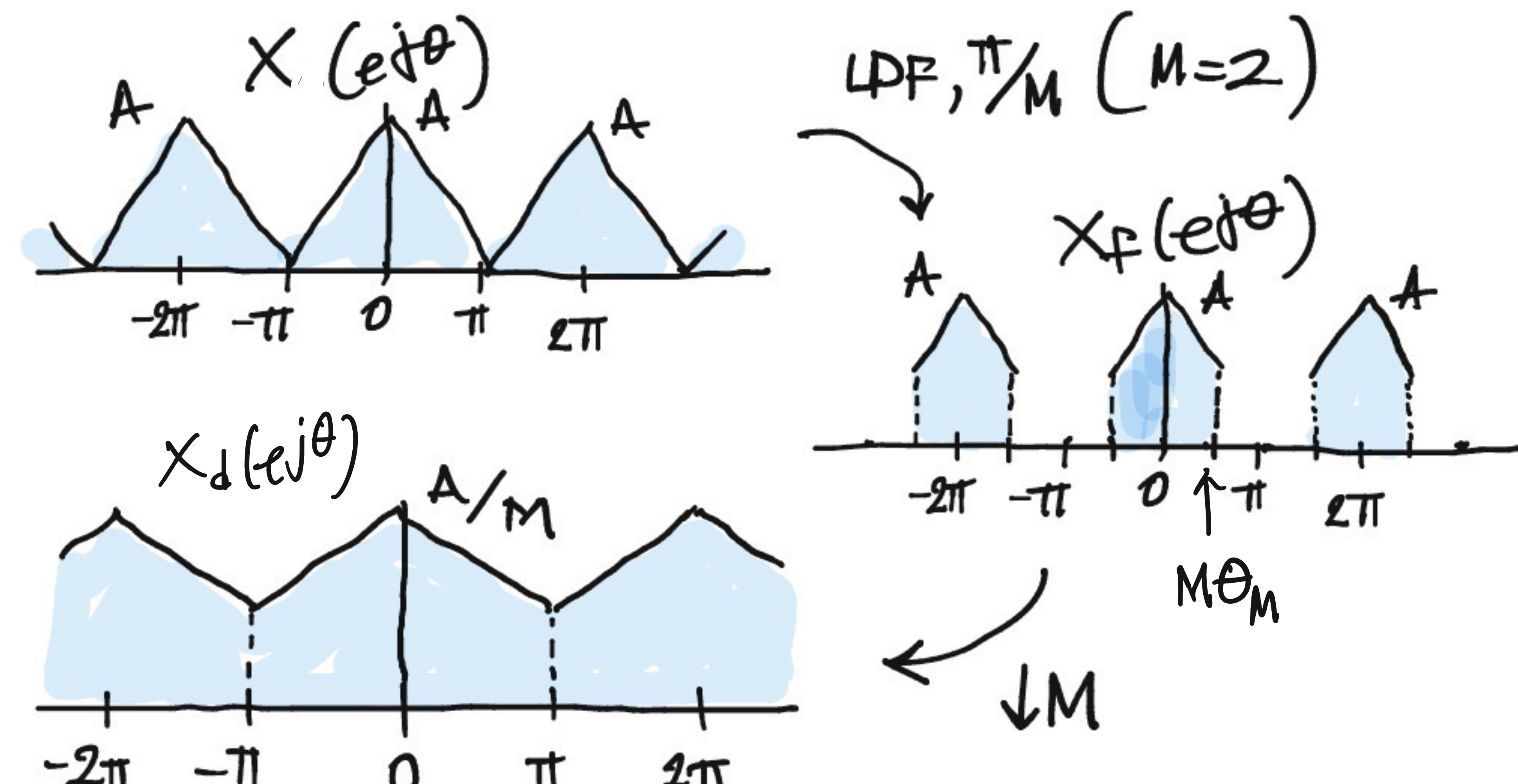
SI NO HAY FILTRADO ANTIALIASING, TENDREMOS ALIASING.

RESUMIENDO: VIMOS QUE PASARÍA EN EL CASO DE HACER UNA RECONSTRUCCIÓN A TIEMPO CONTINUO Y DEDUCIMOS QUE SE DEBE FILTRAR LPF. PODEMOS HACER EL PROCEDIMIENTO PERO SIN RECONSTRUIR, TRABAJANDO SOLO CON LA SECUENCIA, PERO DEBEMOS INCLUIR UN FILTRADO LPF ANTES DEL DECIMADOR CON

$$\theta_c = \left(\frac{1}{2}\omega_s'\right) T_s = \frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{T_s'}\,T_s = \frac{\pi}{M}$$

SUBSAMPLING. SUBMUESTREO



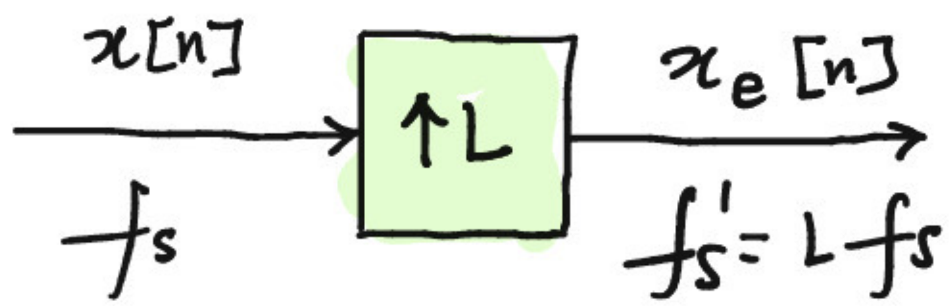


TRABAJANDO SIEMPRE CON LAS SECUENCIAS EN TIEMPO DISCRETO.

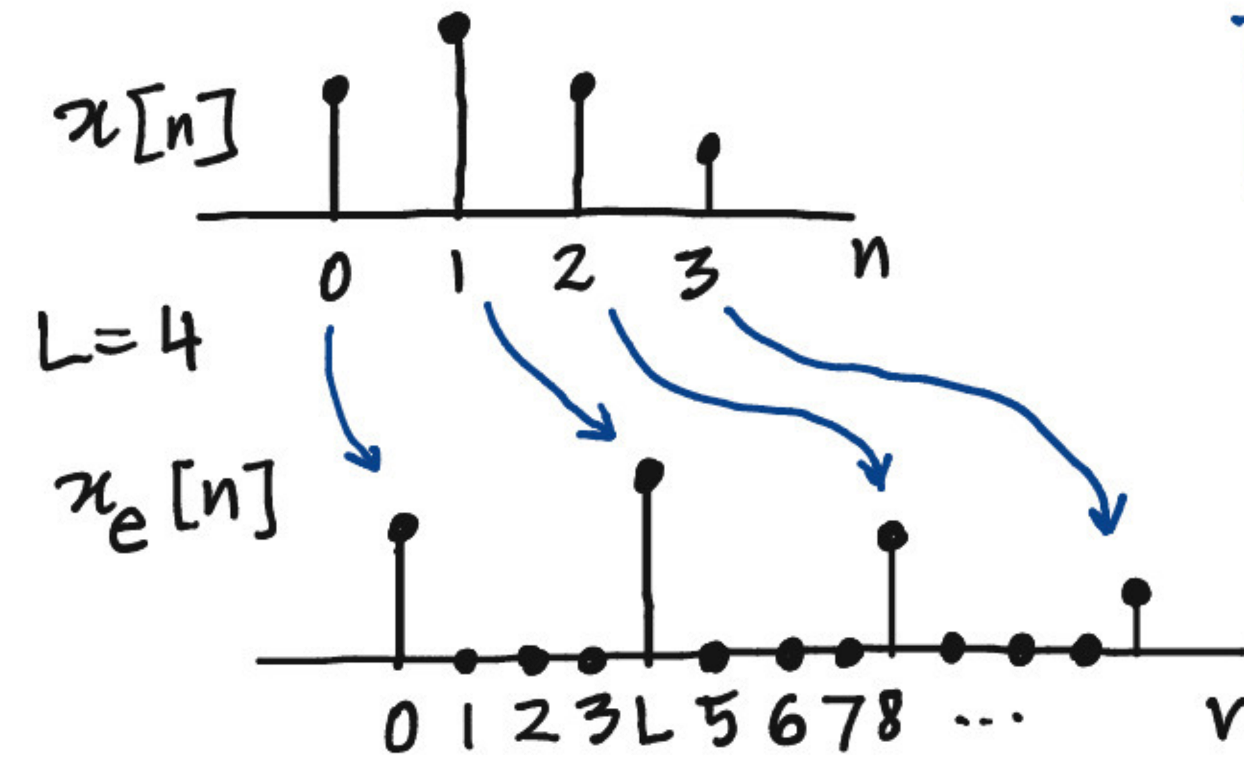
AUMENTO DE LA FRECUENCIA DE MUESTREO EN UN FACTOR ENTERO L

EXPANSOR / INTERPOLADOR (L)

(Agrega L-1 ceros entre muestras)



$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = kL \\ 0, & n \neq kL \end{cases}$$

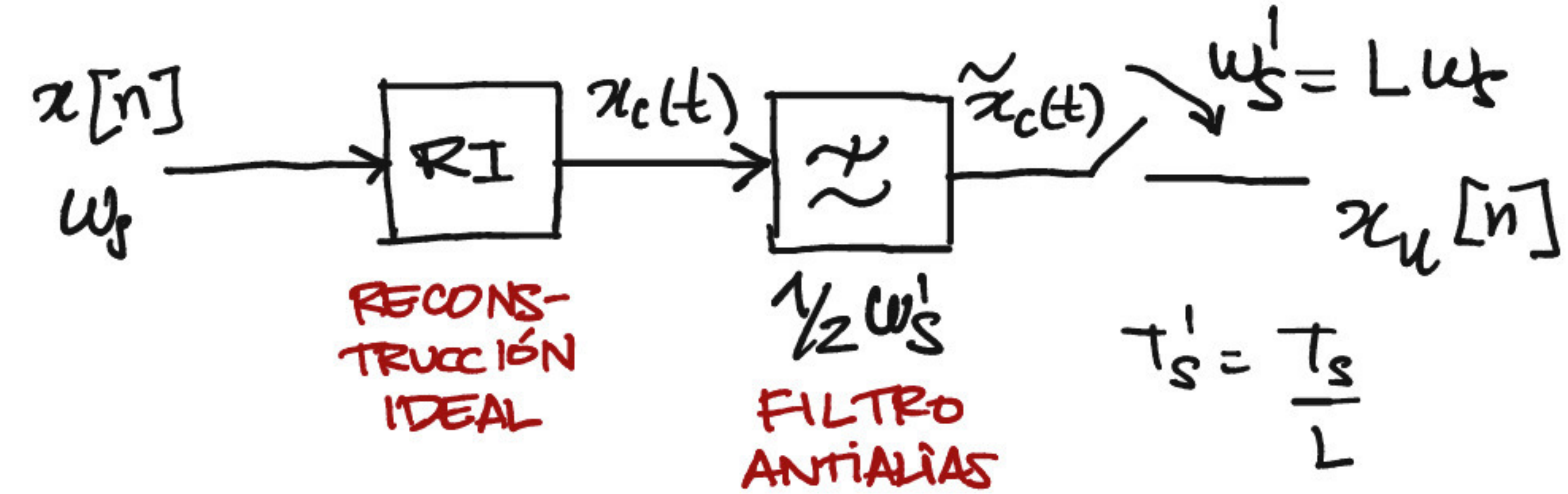


DE OTRA FORMA

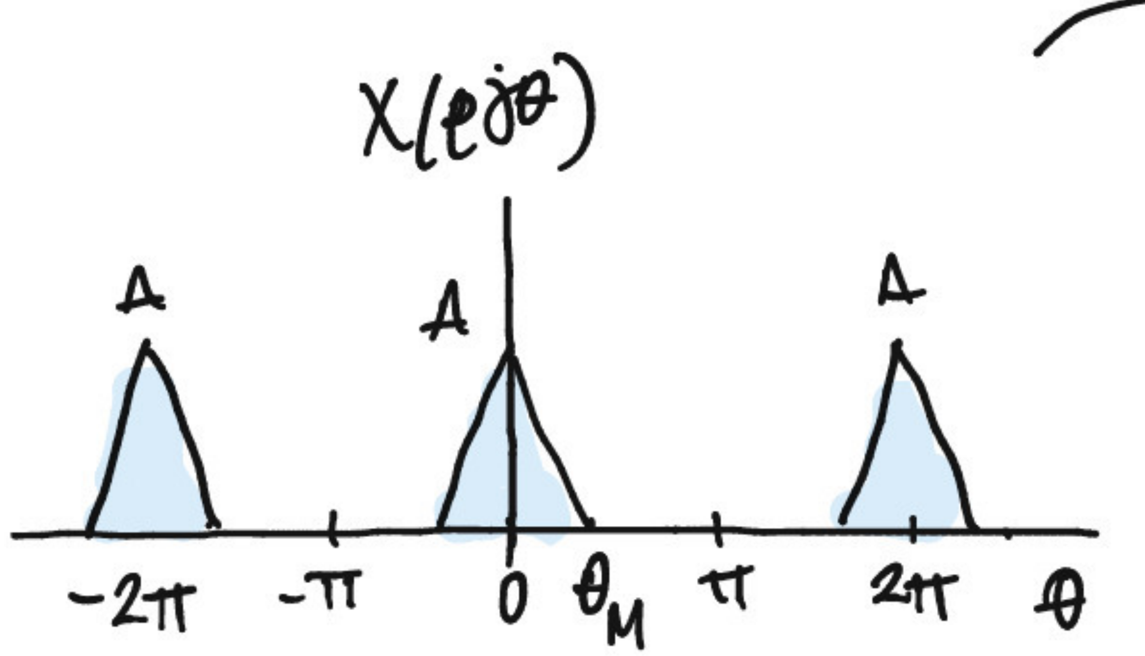
$x_e[kL] = x[k]$

CON $k \in \mathbb{Z}$ O SINO VALE $x_e[\cdot] = 0$

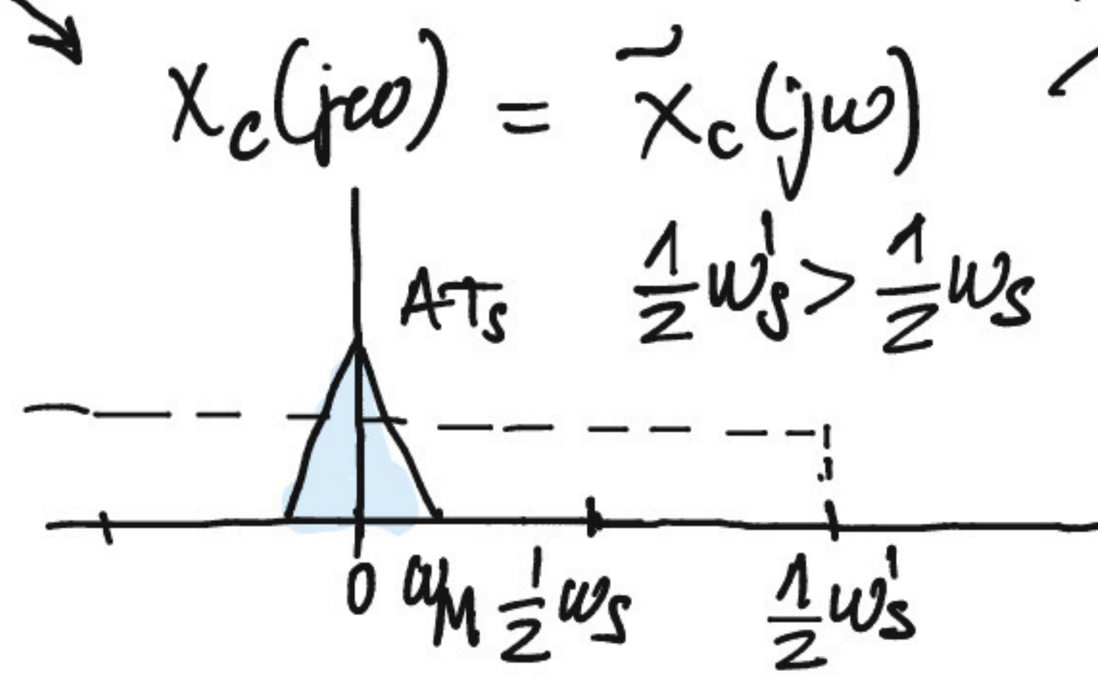
NUEVAMENTE VEAMOS EL PROCESO EN UN DIAGRAMA CON RECONSTRUCCIÓN PARA ENTENDER EL PROCEDIMIENTO.



$T_s' = \frac{T_s}{L}$

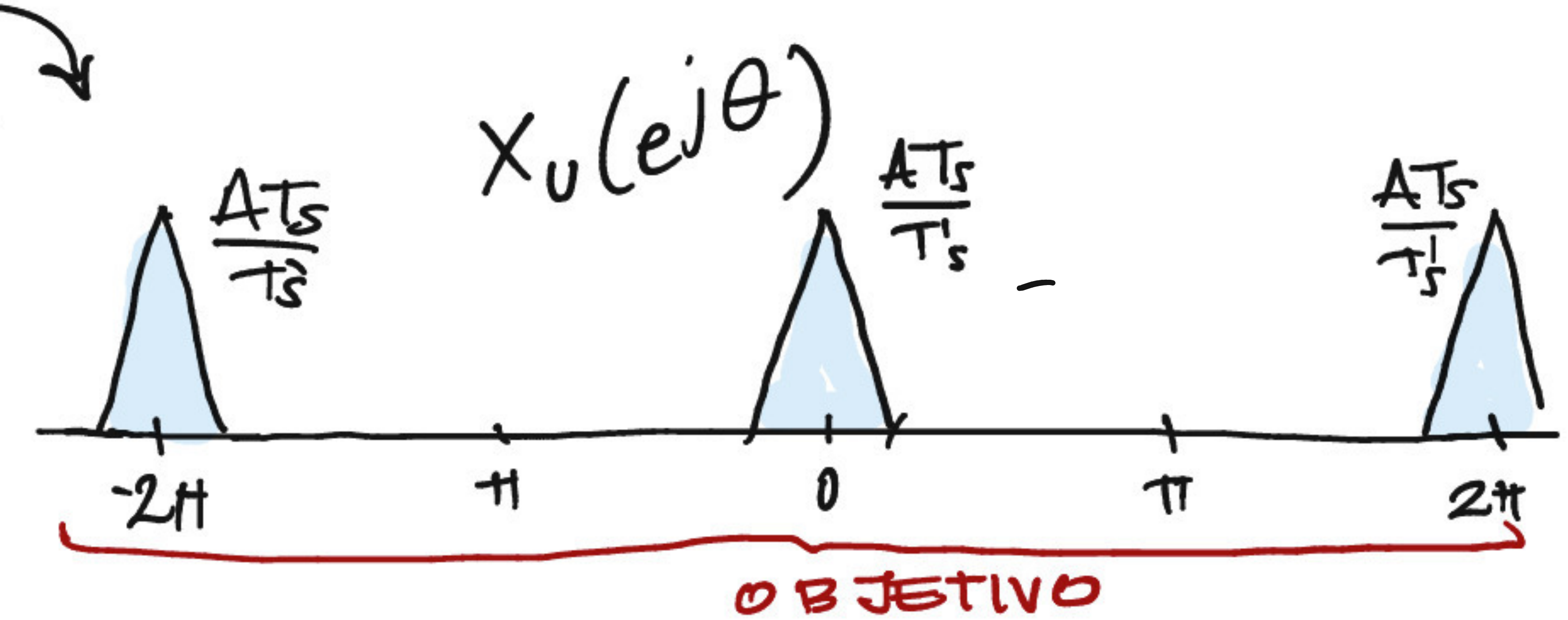


RI



MUESTREO

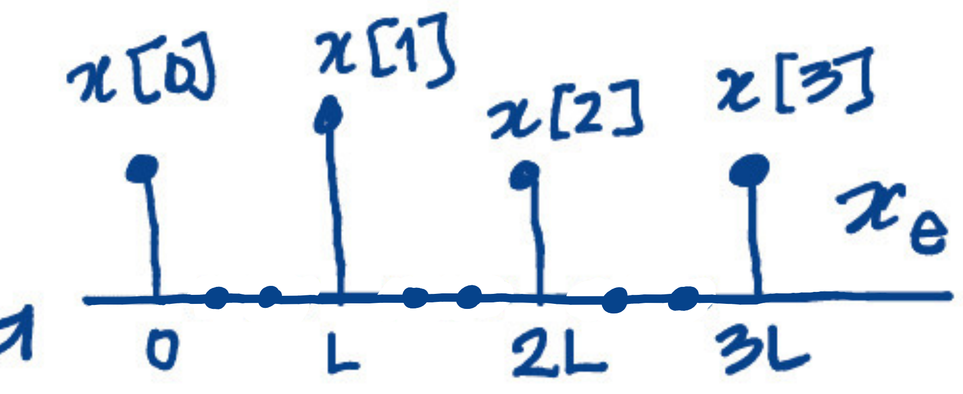
ω_s'



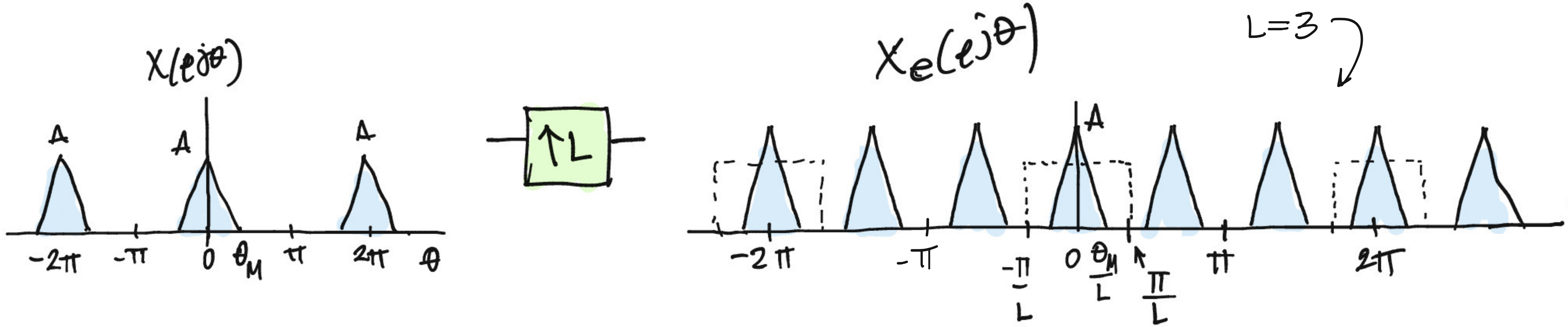
VEAMOS LA RELACIÓN ENTRE ESPECTROS

$$X_e(e^{j\theta}) = \sum_n x_e[n]\, e^{-jn\theta} = \sum_k x_e[kL]\, e^{-jkL\theta} = \sum_k x[k]\, e^{-jkL\theta} = X(e^{jL\theta})$$

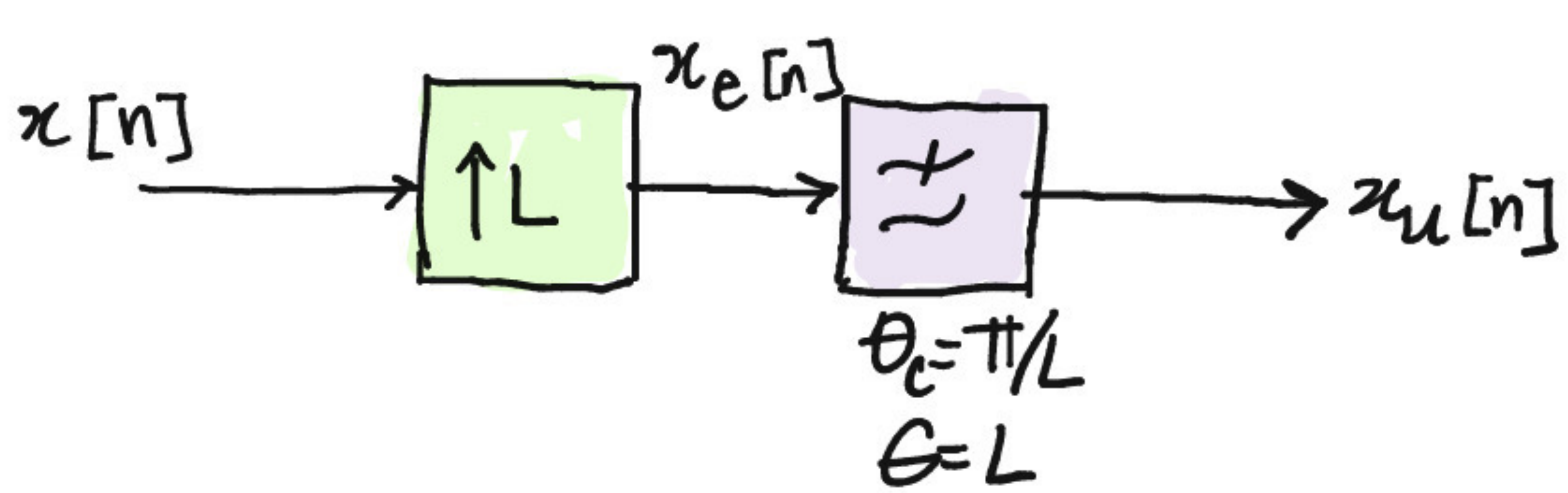
$x_e[kL] = x[k]$
o vale ∅

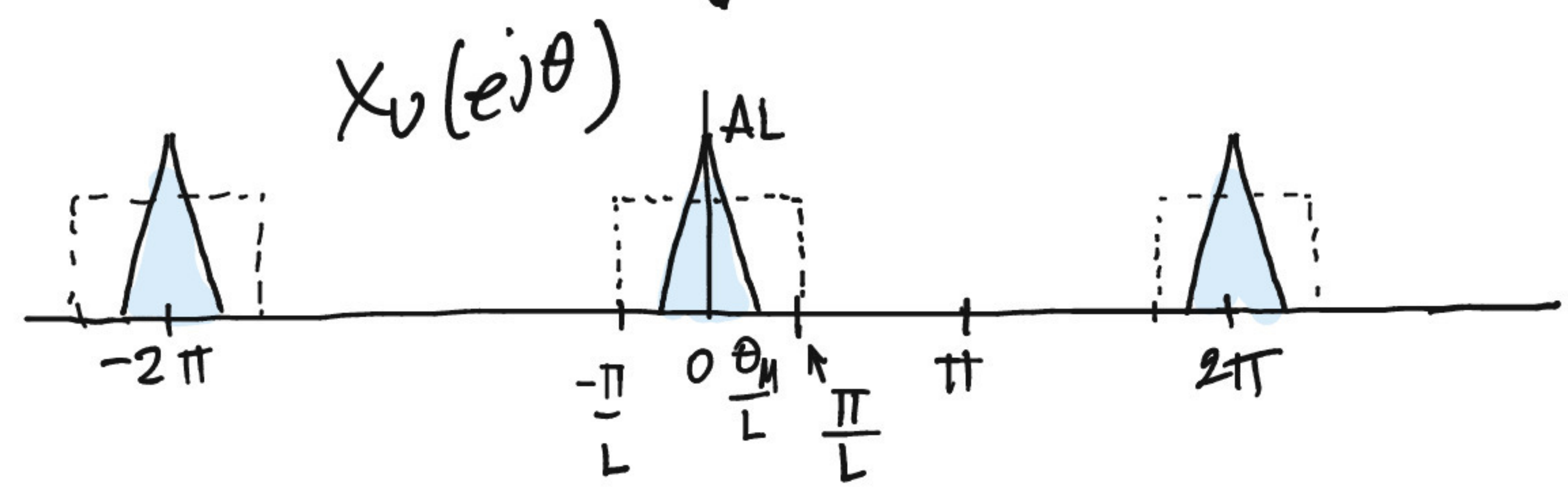


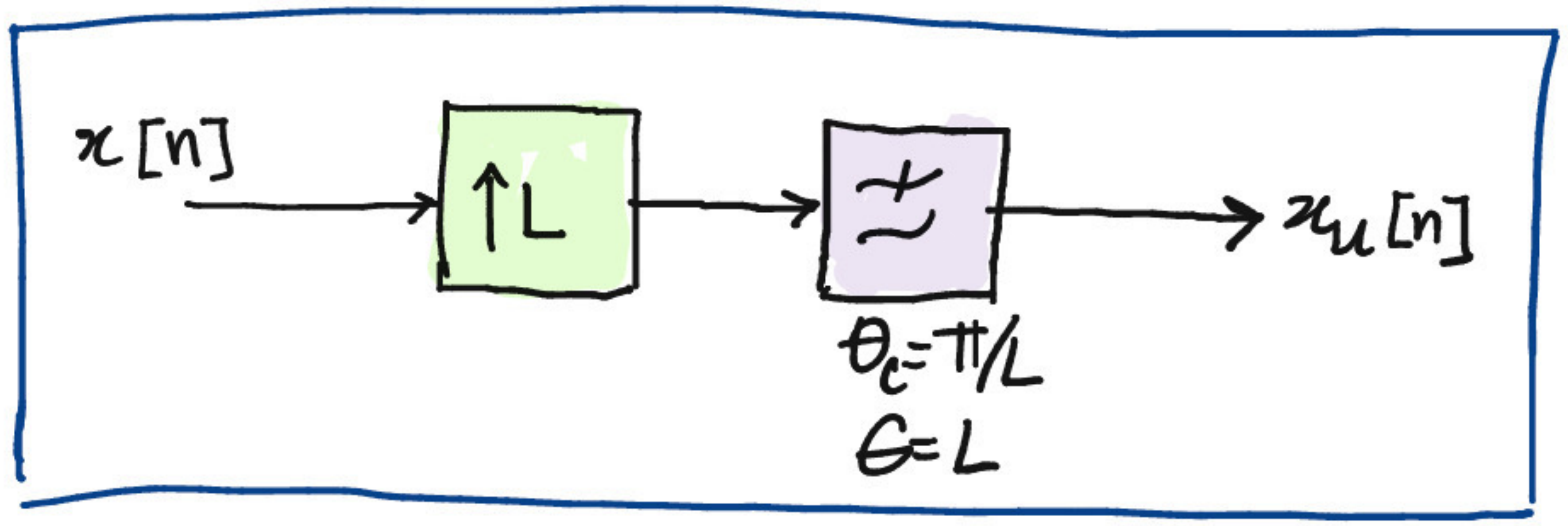
$$\boxed{X_e(e^{j\theta}) = X(e^{jL\theta})}$$



LPF, π/L, G = L







SOBREMUESTREO
OVERSAMPLING.

IGUAL QUE VIMOS EN LA RECONSTRUCCIÓN, EL LPF FUNCIONA COMO UN INTERPOLADOR CON UN sinc

EN ESTE CASO

$$\Pi\left(\frac{k}{2L}\right) \longleftrightarrow \mathrm{sinc}\left(\frac{n\theta_c}{\pi}\right) = \mathrm{sinc}\left(n/L\right)$$

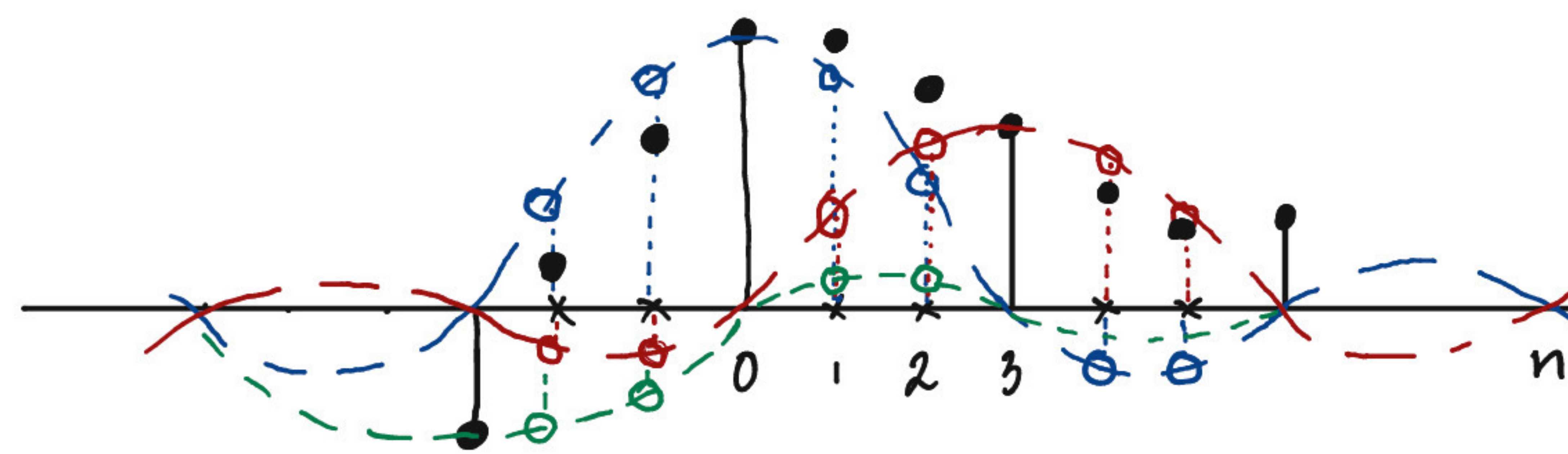
$\theta_c = \pi/L$

Y FUNCIONA DE LA MISMA FORMA YA VISTA INTERPOLANDO VALORES EN LOS $(L-1)$ CEROS QUE SE AGREGARON ENTRE MUESTRAS

EXPANSIÓN DEL TIEMPO
(COMPRESIÓN)

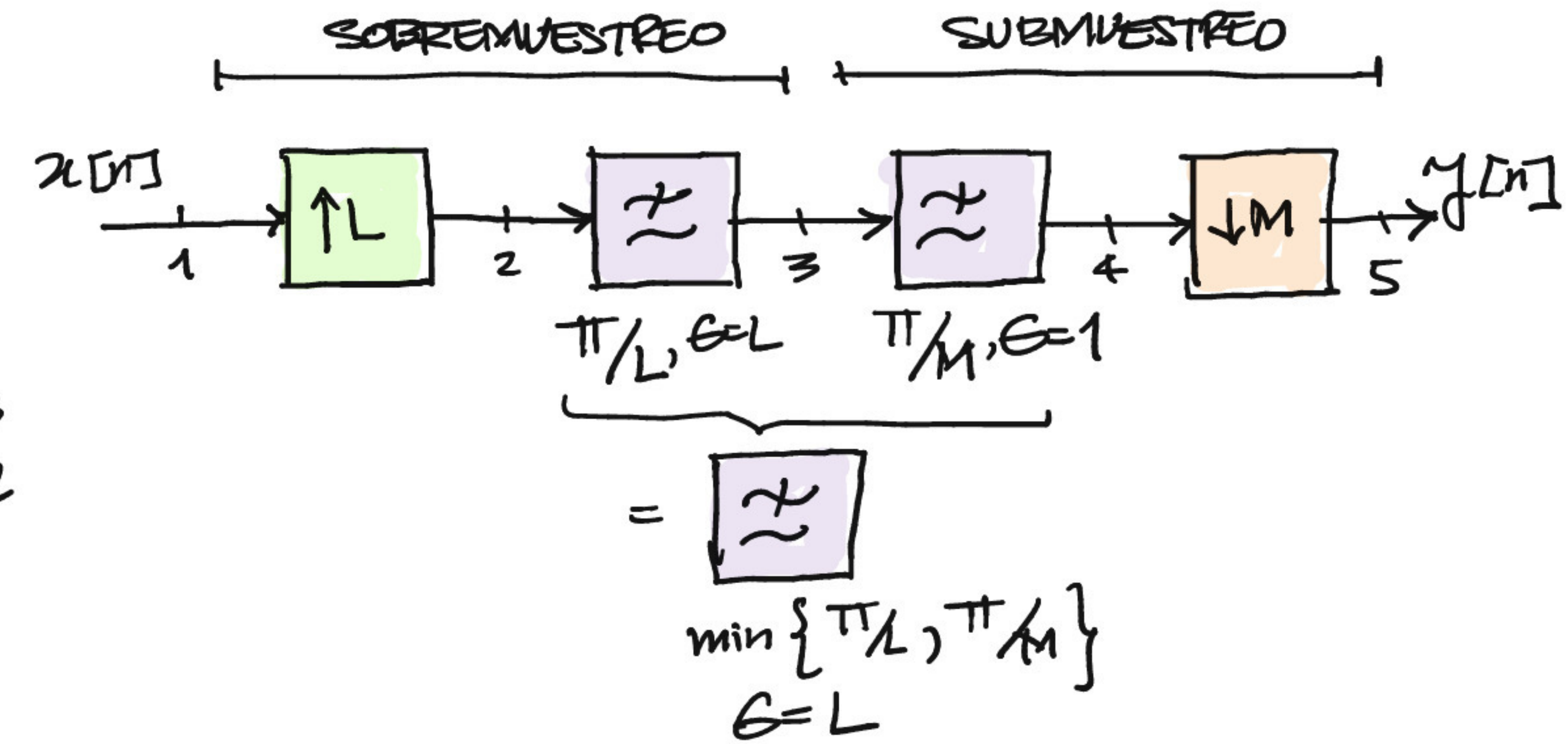
$\Updownarrow$

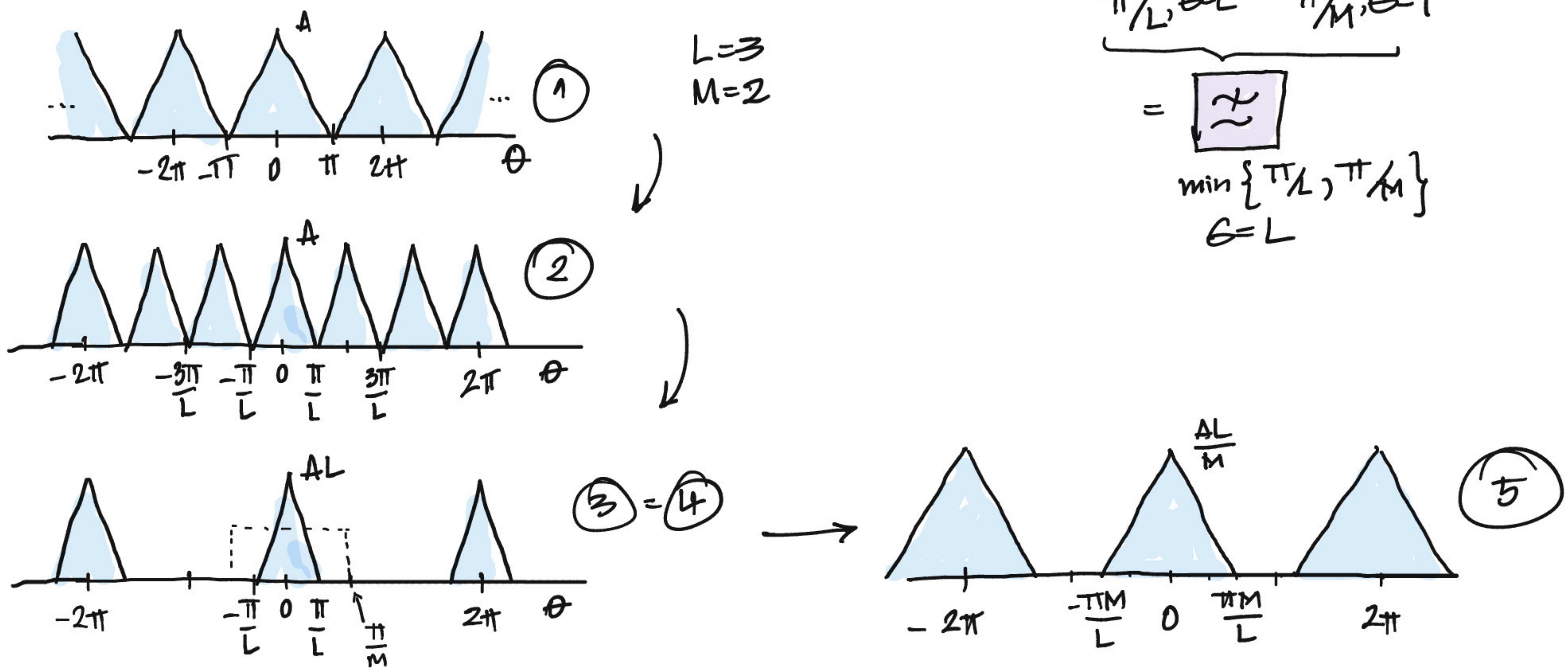
COMPRESIÓN EN FRECUENCIA
(EXPANSIÓN)



CAMBIO DE FRECUENCIA DE MUESTREO EN UN FACTOR RACIONAL L/M

OBVIAMENTE SE LOGRA CONCATENANDO (INTELIGENTEMENTE) LOS MÓDULOS DE SOBRE Y SUBMUESTREO.





EJERCICIO: MOSTRAR QUE SI SE CONCATENAN LOS BLOQUES DE SUB Y SOBREMUESTREO AL REVÉS SE PIERDE INFORMACIÓN.