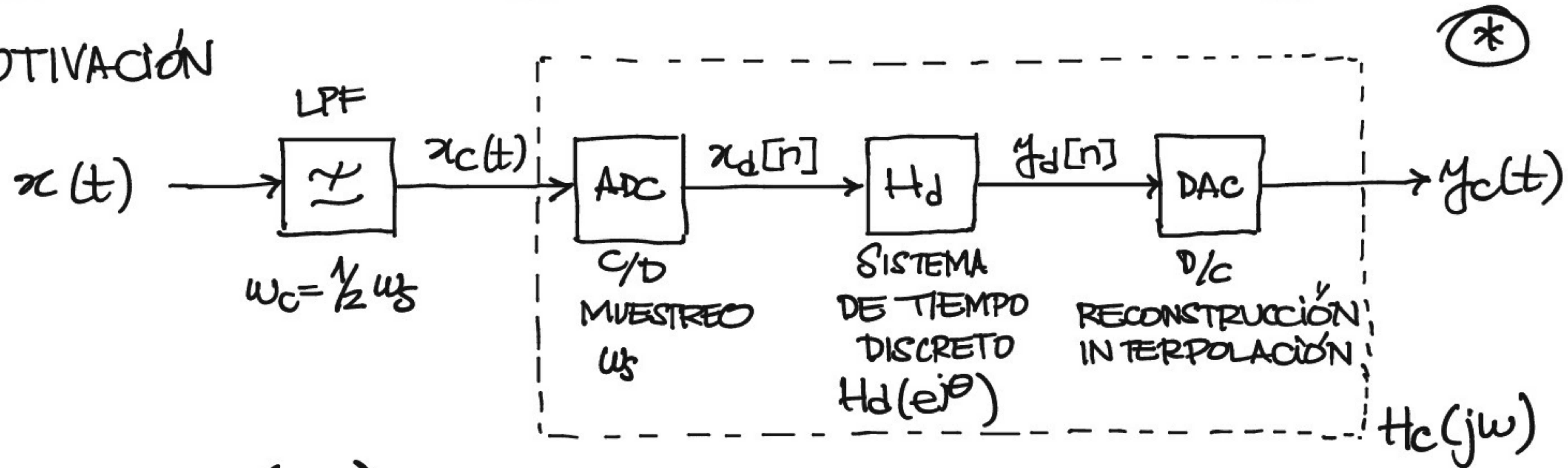
Procesamiento Digital de Señales de Tiempo Continuo

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES DE TIEMPO CONTINUO

* MOTIVACIÓN



T_s: PERÍODO DE MUESTREO

$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$: FRECUENCIA (ANGULAR) DE MUESTREO

$\omega_s = 2\pi f_s$

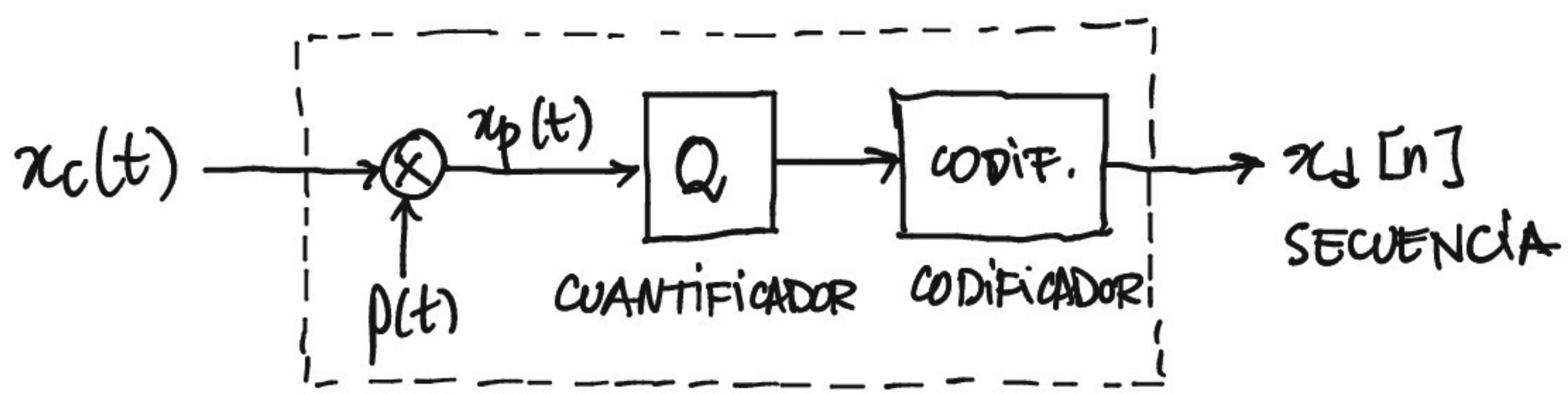
f_s: FRECUENCIA DE MUESTREO (Hz)

$$x_d[n] = x_c(nT_s)$$
$$y_d[n] = y_c(nT_s)$$
$$Y_c(j\omega) = H_c(j\omega)\,X_c(j\omega)$$
$$Y_d(e^{j\theta}) = H_d(e^{j\theta})\,X_d(e^{j\theta})$$

NOTACIÓN: AL USAR TIEMPO CONTINUO Y TIEMPO DISCRETO EN EL MISMO ANÁLISIS, RECORDEMOS QUE USAMOS ω PARA LA FRECUENCIA DE LA TRANSFORMADA DE TIEMPO CONTINUO Y θ EN EL CASO DISCRETO.

$$x_c(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_c(j\omega) \qquad x_d[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_d(e^{j\theta})$$

PARA MODELAR EL ADC CONSIDERAMOS EL SIGUIENTE DIAGRAMA CON LOS BLOQUES VISTOS EN LOS MODELOS ANTERIORMENTE



TREN DE IMPULSOS $\quad p(t) = \sum_k \delta(t - kT_s)$

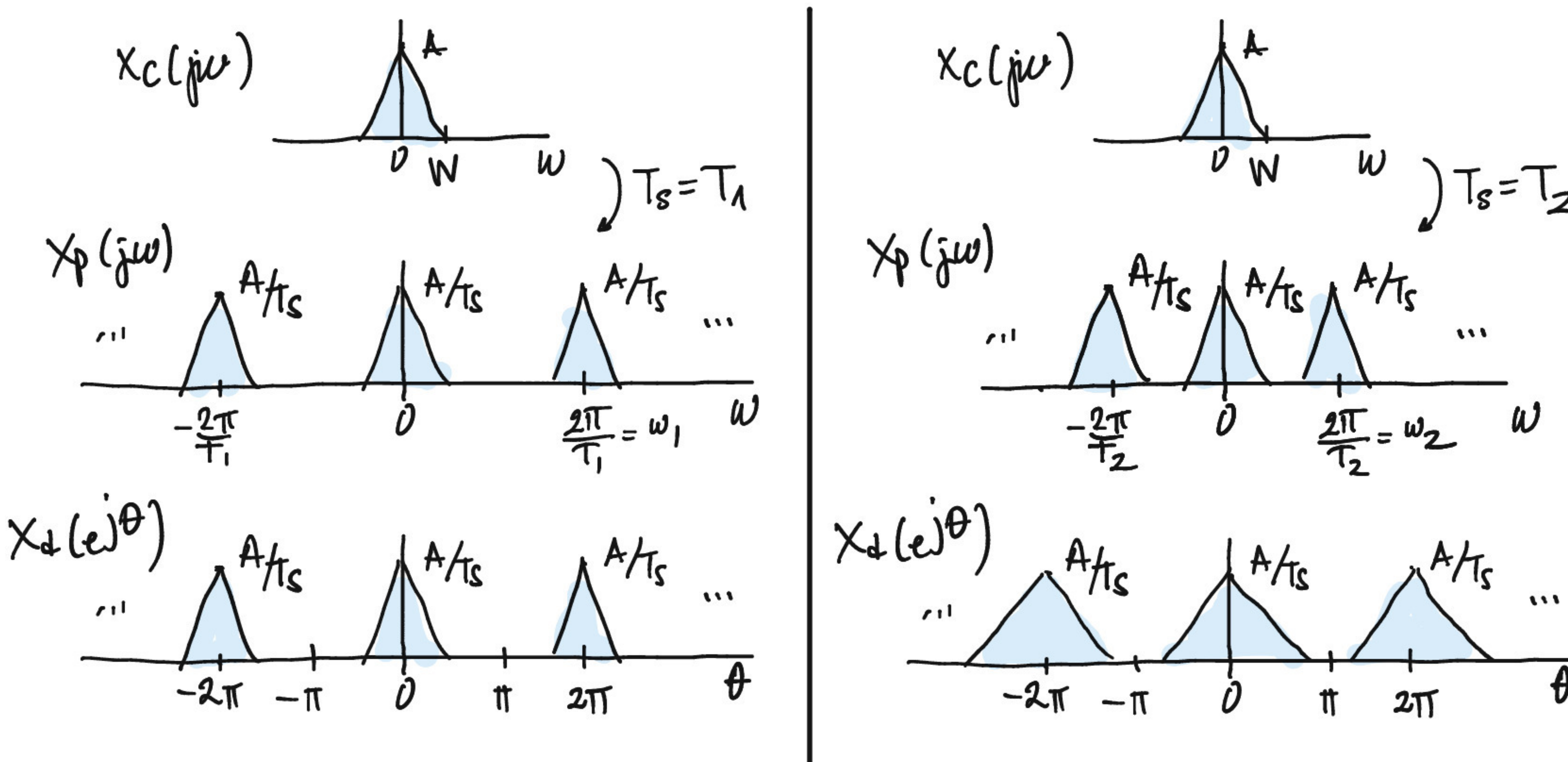
$$x_p(t) = \sum_n x_c(nT_s)\,\delta(t-nT_s) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_p(j\omega) = \sum_k x_c(kT_s)\, e^{-j\omega k T_s}$$

¡IGUALES CON $\theta = \omega T_s$

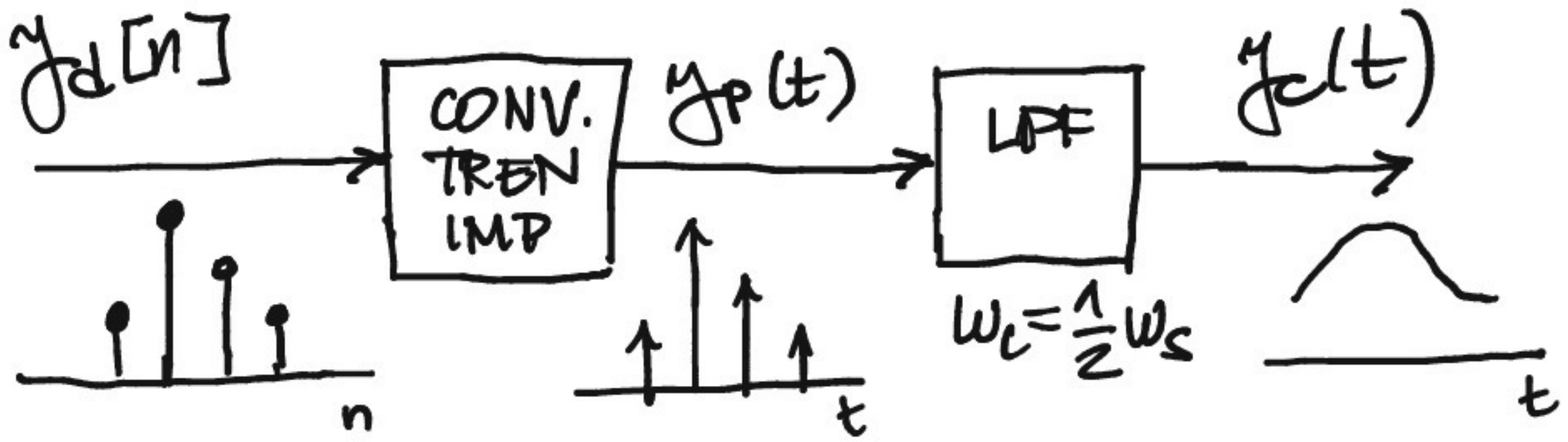
Por otro lado $$x_d[n] \longleftrightarrow X_d(e^{j\theta}) = \sum_n x_d[n]\, e^{-j\theta n} = \sum_n x_c(nT_s)\, e^{-j\theta n}$$

$$X_d(e^{j\theta}) = X_c\left(j\frac{\theta}{T_s}\right)$$

Además vimos que $$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_k X_c(j(\omega - k\omega_s)) \rightarrow X_d(e^{j\theta}) = \frac{1}{T_s}\sum_k X_c\left(j(\theta - k2\pi)\,1/T_s\right)$$



UNA VEZ PROCESADA LA SECUENCIA $x_d[n]$ OBTENEMOS LA SECUENCIA $y_d[n]$. ÉSTA ES CONVERTIDA A $y_d(t)$ MEDIANTE INTERPOLACIÓN, MODELADO COMO UNA CONVERSIÓN A TREN DE IMPULSOS Y LUEGO FILTRADO LPF ($\omega_c = 1/2\, \omega_s$)



$$y_c(t) = \sum_k y_d[k] \operatorname{sinc}\left(\frac{t - kT_s}{T_s}\right)$$

AHORA, LO QUE BUSCAMOS ES HACER UN PROCESAMIENTO DE $X_c(j\omega)$ DE FORMA DE OBTENER

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)\, H_c(j\omega)$$

DONDE $H_c(j\omega)$ ES DISEÑADO O DETERMINADO CON ALGÚN CRITERIO.

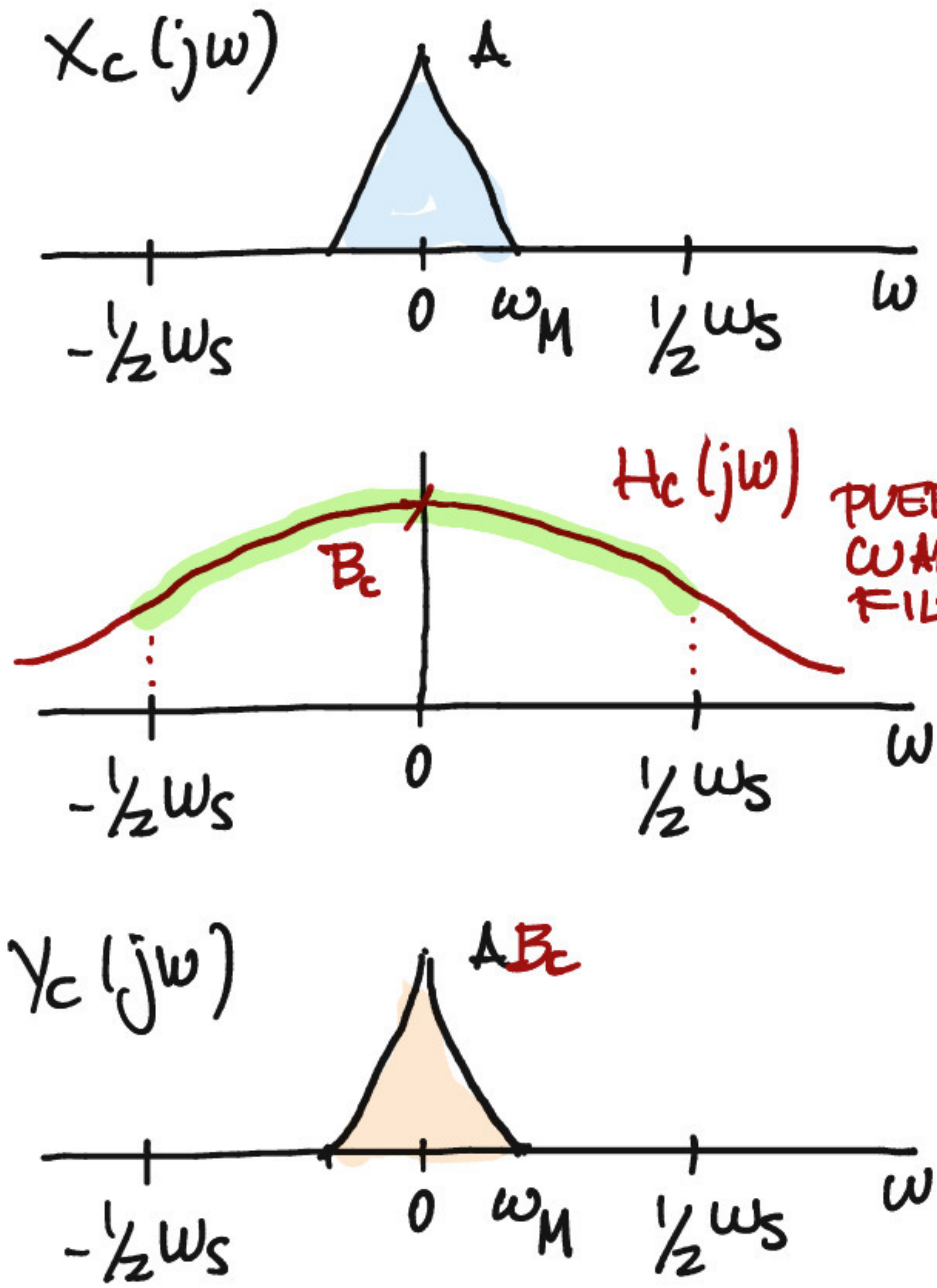
PERO NO QUEREMOS HACER EL FILTRO $H_c(j\omega)$ EN TIEMPO CONTINUO, QUEREMOS HACER PROCESAMIENTO DIGITAL, EN TIEMPO DISCRETO, SEGÚN EL DIAGRAMA (*)

¿ES POSIBLE? ¿HAY ERRORES?

¿BAJO QUÉ HIPÓTESIS FUNCIONA?

VEAMOS COMO ES EL PROCESO EN EL ESPECTRO POR AMBOS CAMINOS. (TC Y TD)

TIEMPO CONTINUO

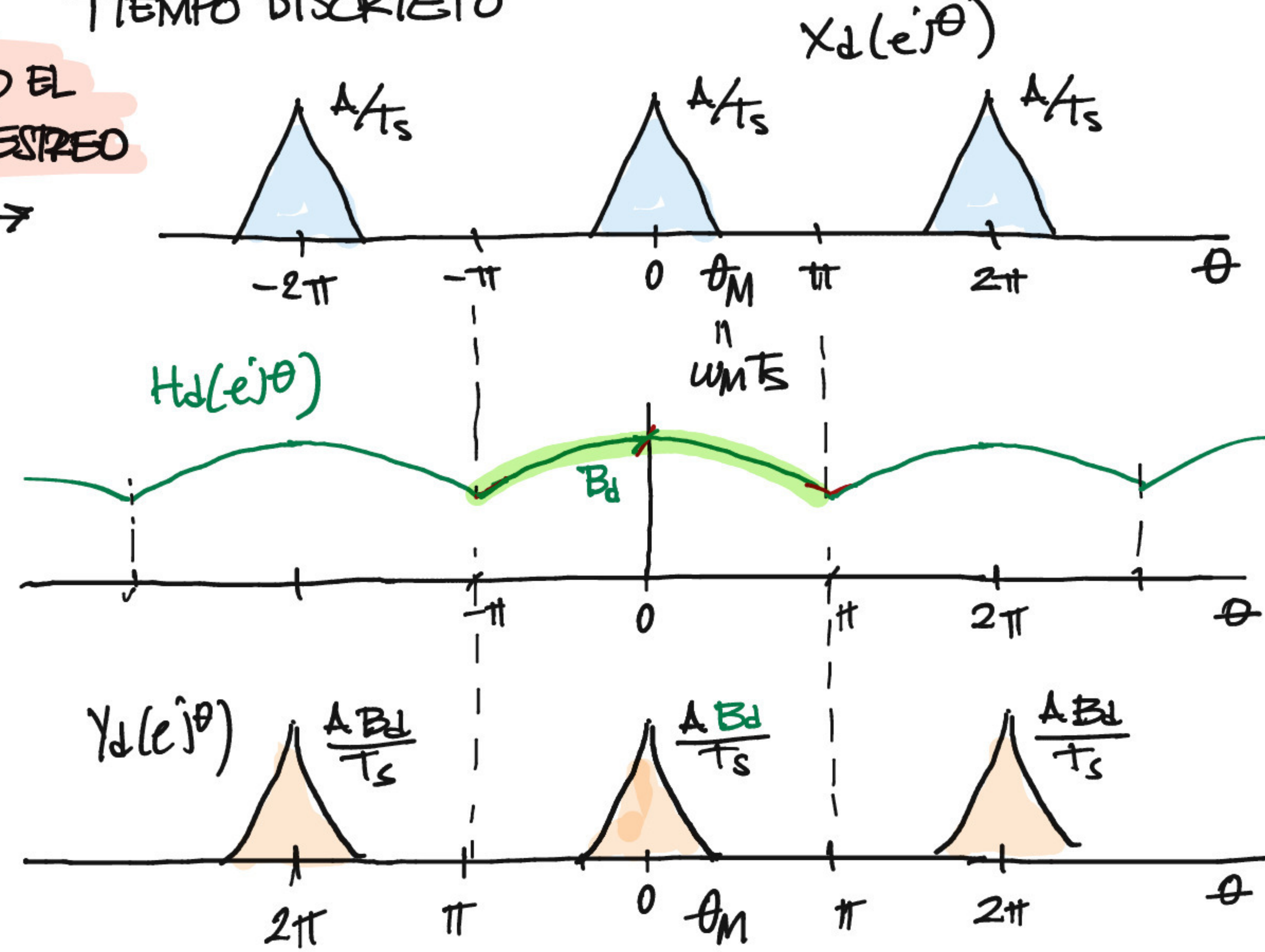


PUEDE SER CUALQUIER FILTRO

CUMPLIENDO EL TEO DEL MUESTREO

FILTRADO

TIEMPO DISCRETO



$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)\,H_c(j\omega)$$

$$Y_d(e^{j\theta}) = X_d(e^{j\theta})\,H_d(e^{j\theta})$$

RECONTRUCCIÓN IDEAL

¿ES POSIBLE QUE ESTOS ESPECTROS SEAN IGUALES?

¿ $Y_c(j\omega) = Y_R(j\omega)$?

¿CÓMO DEBE SER LA RELACIÓN ENTRE $H_c(j\omega)$ Y $H_D(e^{j\theta})$ PARA QUE EL RESULTADO SEA EL MISMO? ES DECIR $Y_c(j\omega)=Y_R(j\omega)$

$$H_D(e^{j\theta})\Big|_{\theta=\omega T_s} = H_c(j\omega) \quad \forall\, |\omega|<\tfrac{1}{2}\omega_s$$

O DE OTRA FORMA

$$H_c(j\omega)=\begin{cases} H_D(e^{j\omega T_s}), & |\omega|<1/2\,\omega_s \\ 0, & |\omega|>1/2\,\omega_s\end{cases} \qquad (*)$$

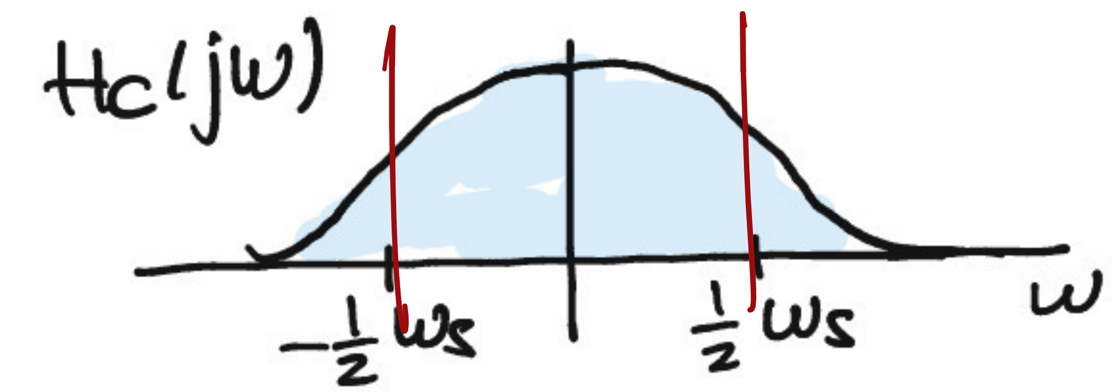
MIENTRAS QUE SE CUMPLAN LAS CONDICIONES DEL TEOREMA DEL MUESTREO.

¿CÓMO IMPLEMENTAMOS ESTE $h_D[n]$?

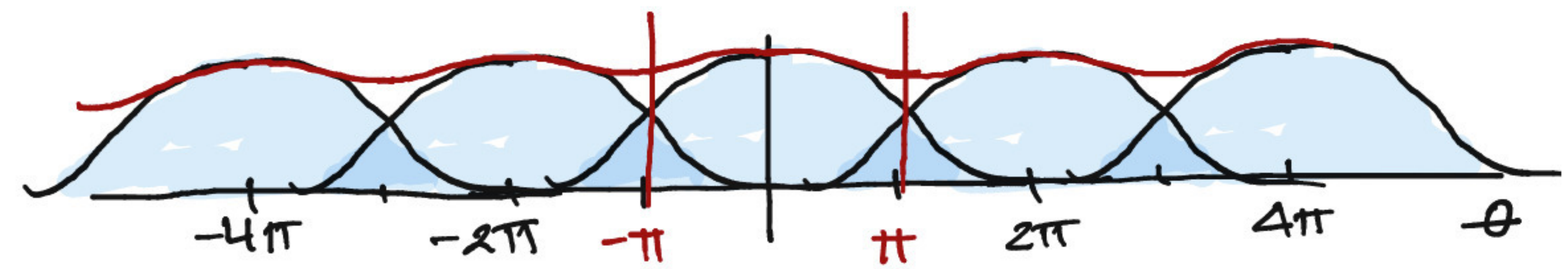
DIRECTAMENTE USANDO EL TEO. DEL MUESTREO

$$h_D[n] = h_c(n\cdot T_s)$$

¿QUÉ PASA SI EL FILTRO $H_c(j\omega)$ NO CUMPLE ESTAS CONDICIONES (*)?



CUANDO TOMAMOS SU MUESTRAS HAY SOLAPAMIENTO



EL FILTRO $H_D(e^{j\theta})$ NO HACE LO MISMO QUE EL $H_c(j\omega)$

¿QUE DEBEMOS HACER CON LAS DIFERENCIAS?

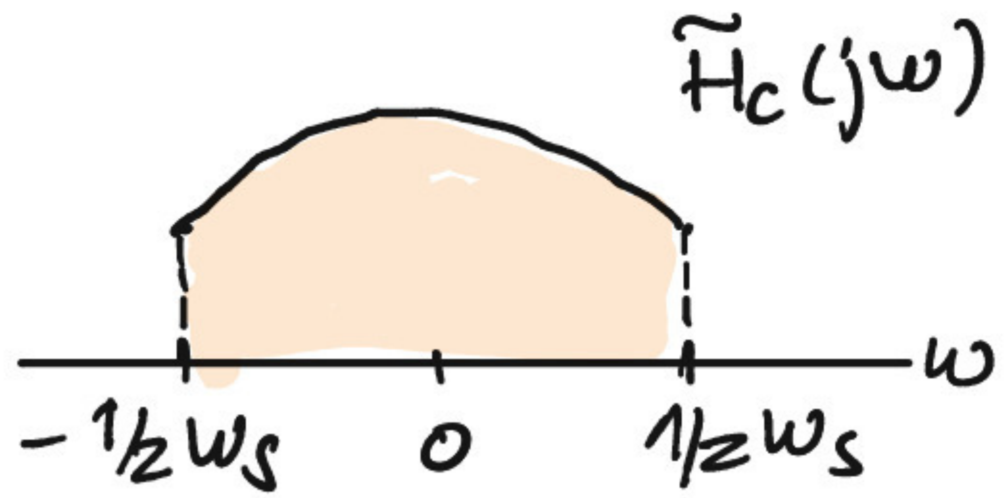
1. GANANCIAS: B_D/T_s VS. B_c ← AMPLIFICACIÓN
2. $H_c(j\omega)\neq 0 \quad |\omega|>1/2\,\omega_s$ ← FILTRADO ANTIALIASING ~~ENVENTANADO~~

ELIMINAR COMPONENTES EN $|\omega|>1/2\,\omega_s$ OBTENIENDO UN $\tilde{H}_c(j\omega)$ VÁLIDO.

EJEMPLO:

TENGO $H_c(j\omega)$.

FRECUENCIA DE MUESTREO: ω_s

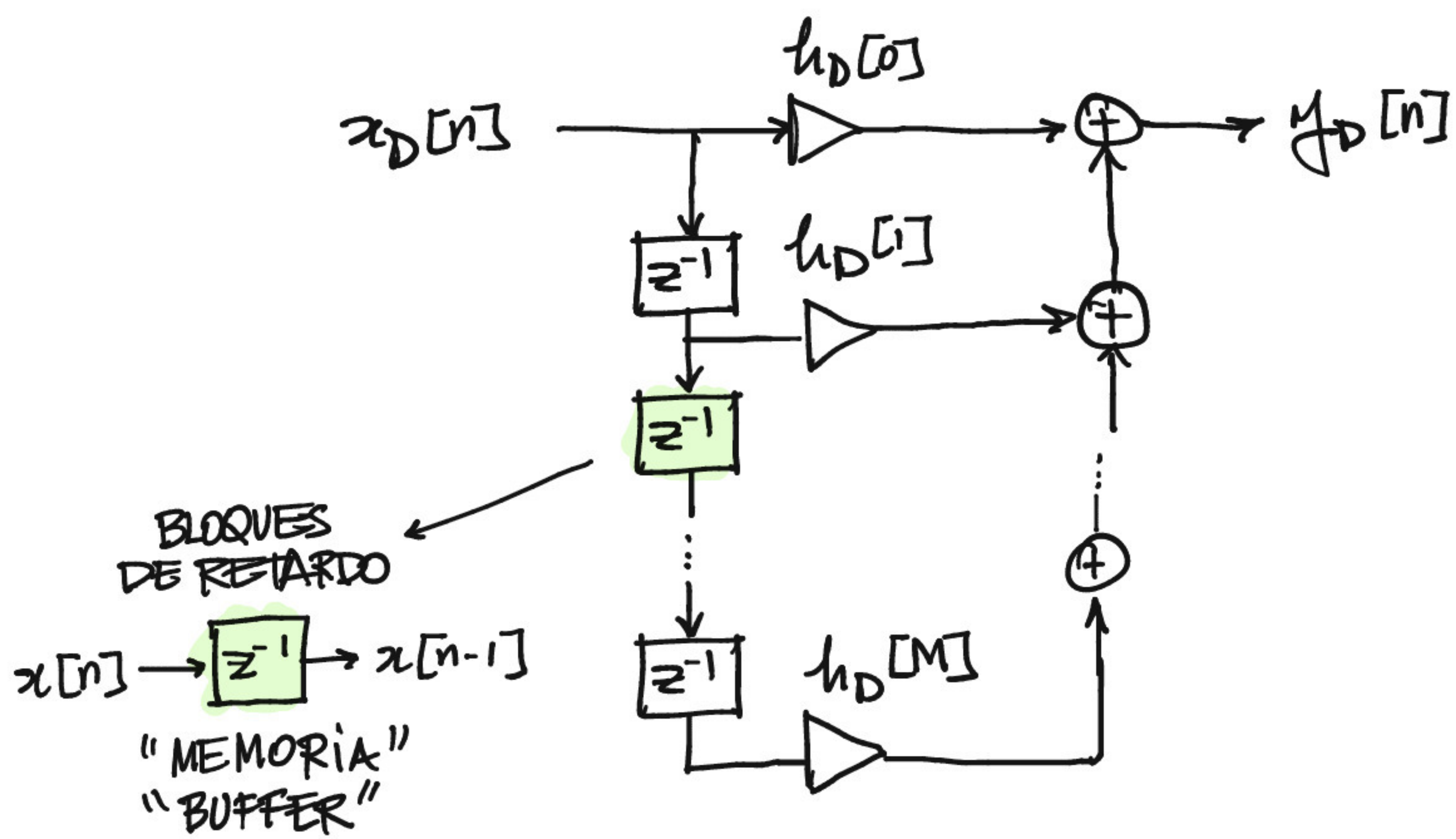


FILTRAR (ANTIALIASING)

① ~~ENVENTAR~~ $H_c(j\omega) \longrightarrow \tilde{H}_c(j\omega),\ \tilde{h}_c(t)$

② MUESTREAR $\tilde{h}(t) \longrightarrow h_D[n] = T_s\,\tilde{h}(nT_s)$

IMPLEMENTACIÓN DEL FILTRO A PARTIR DE $h_D[n]$

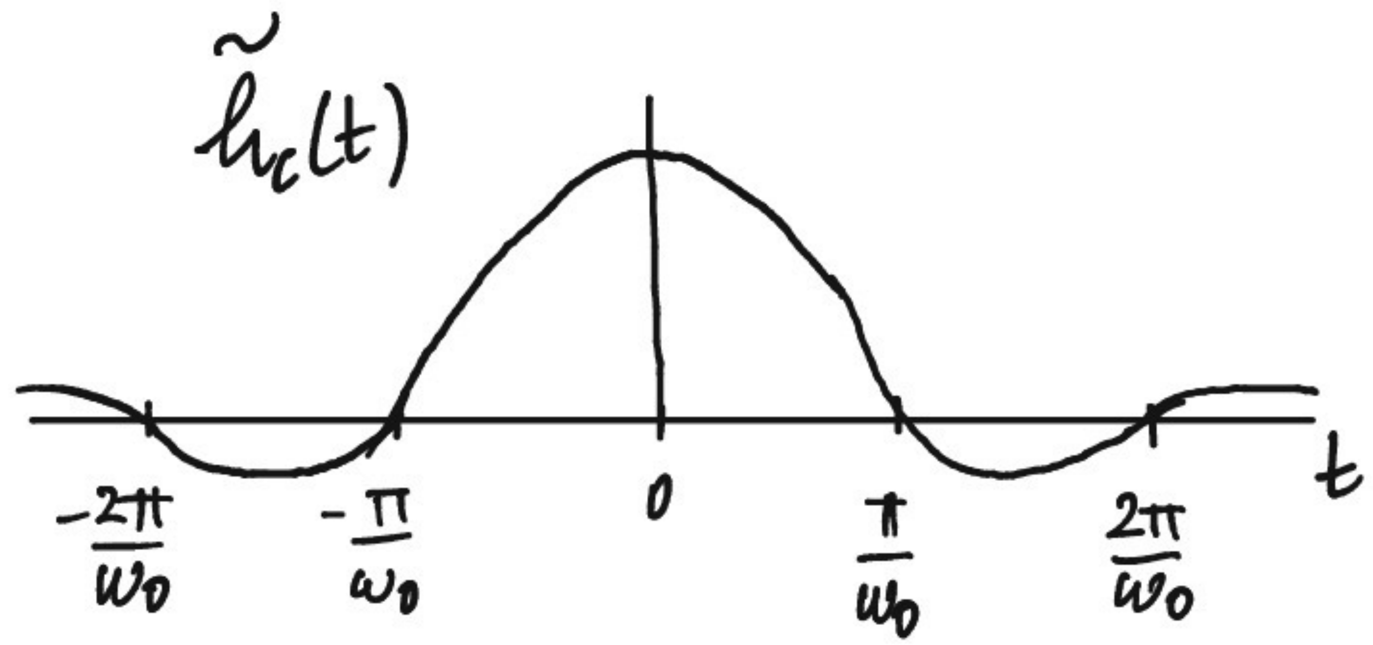


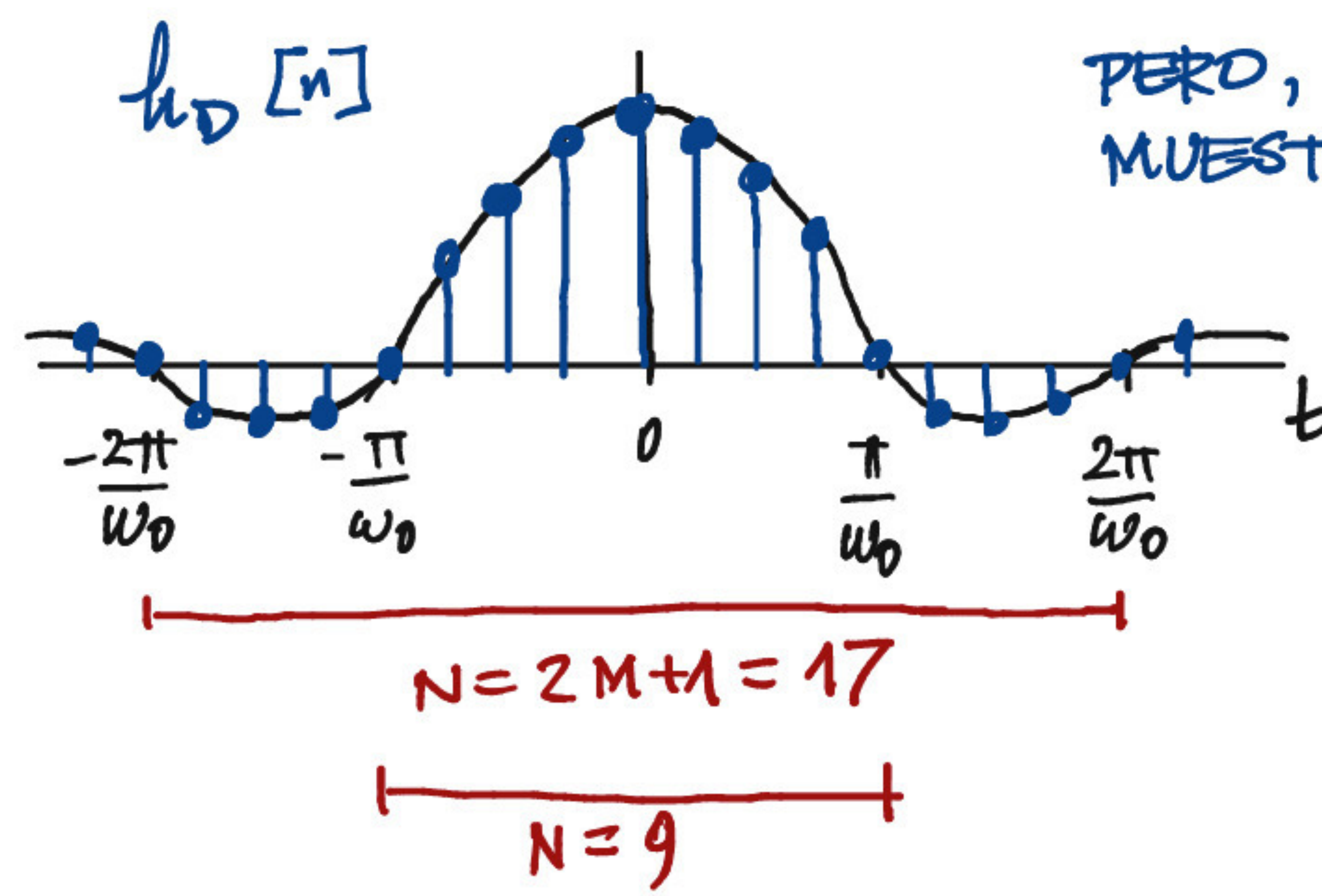
EJEMPLO: PASABAJOS IDEAL

① EL ENVENTANADO NO LO AFECTA

$$H_c(j\omega) = \tilde{H}_c(j\omega)$$

② $\tilde{h}_c(t) = \dfrac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\omega_0 t}{\pi}\right) \Rightarrow h_D[n] = \dfrac{\omega_0 T_s}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\omega_0 n T_s}{\pi}\right)$





PERO, SON INFINITAS MUESTRAS NO NULAS !

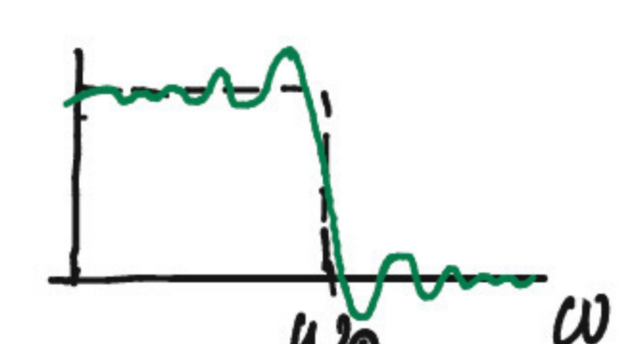
→ DEBEMOS RECORTAR LA CANTIDAD DE MUESTRAS $h_D[n]$ PARA ARMAR EL FILTRO REAL, DIGAMOS N=2M+1 MUESTRAS

COMENTARIOS SOBRE EL FILTRO DIGITAL DISEÑADO

① DEBE TENER FINITOS COEFICIENTES ⟶ ENVENTANAR LA $h_D[n]$ TENDREMOS UN ERROR EN LA APROXIMACIÓN

② DEBE SER CAUSAL ⟶ RETARDAR $h_D[n]$ PUEDE TENER PROBLEMAS DE RETARDO DE LA SALIDA

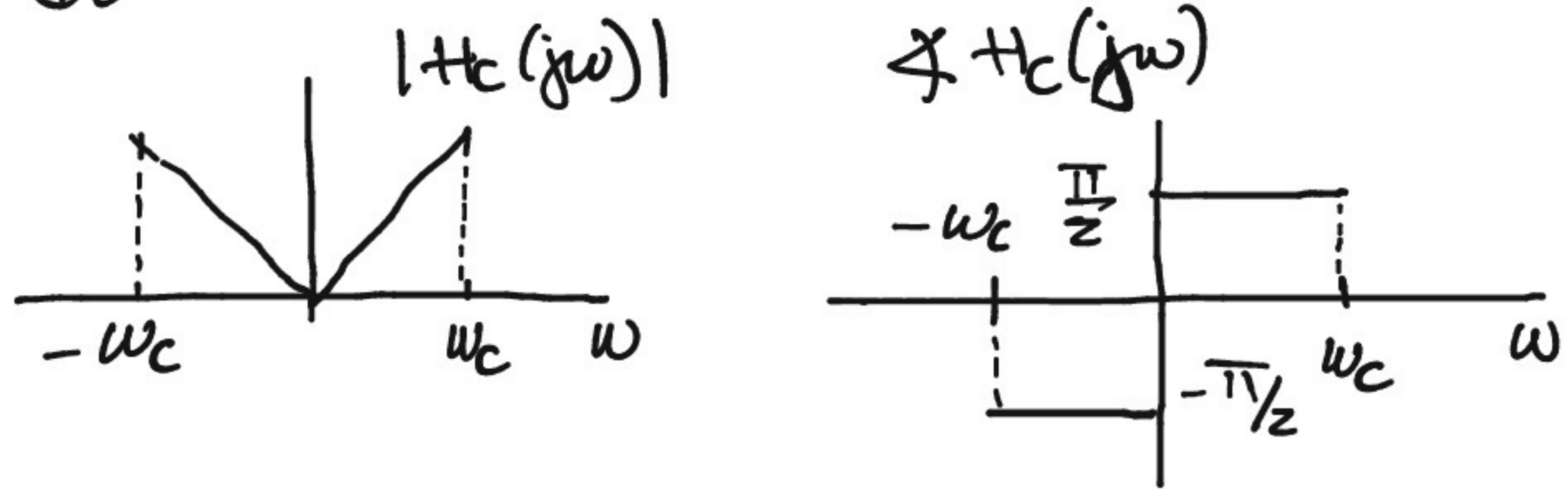
③ APROXIMACIÓN DEL FILTRO IDEAL (CONVERGENCIA LENTA) OSCILACIONES DE GIBBS



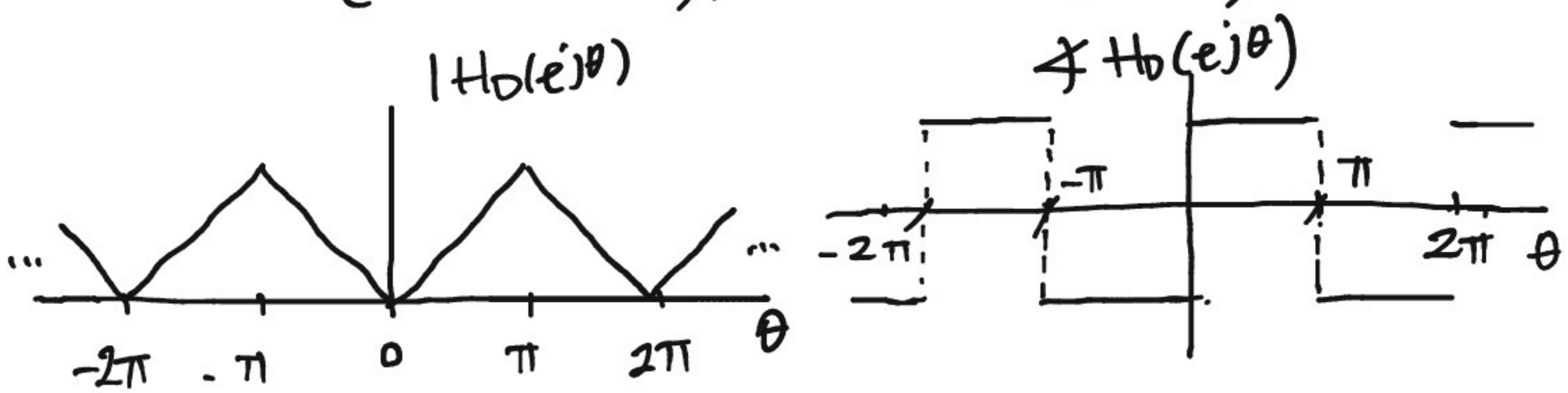
EJEMPLO DERIVADOR (7.4.1)

Consideremos el derivador de banda limitada, w_c.

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} jw\, X(jw) \Rightarrow H_c(jw) = jw$$



Con lo que vimos recién, siendo un filtro de banda limitada y en las condiciones del Teorema del Muestreo ($w_s = 2w_c$), tenemos $H_D(e^{j\theta})$, $\theta = wT_s$



$$H_c(jw) = \begin{cases} jw, & |w| < w_s/2 \\ 0, & |w| > w_s/2 \end{cases} \Rightarrow H_D(e^{j\theta}) = j\frac{\theta}{T_s} \quad |\theta| < \pi$$

EJEMPLO 7.2

CON DERIVADOR

CONSIDERAR EL FILTRADO DE $x_c(t) = \dfrac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t}$

$$x_c(t) = \frac{1}{T_s}\,\mathrm{sinc}(t/T_s)$$

$$X_c(jw) = \Pi\left(\frac{wT_s}{2\pi}\right) = \begin{cases} 1 & |w| < \pi/T_s \\ 0 & |w| > \pi/T_s \end{cases}$$

(ESTAMOS EN LAS CONDICIONES DEL TEO. DEL MUESTREO)

¿Cómo es la salida?

$$y_c(t) = \frac{dx_c(t)}{dt} = \frac{\cos(\pi t/T_s)}{T_s t} - \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t^2}$$

EL MUESTREO DE $x_c(t)$, i.e., $x_d[n] = x_c(nT_s)$ QUEDA $x_d[n] = 1/T_s\,\delta[n]$

Y LA SALIDA SERÁ

$$y_d[n] = y_c(nT_s) = \begin{cases} \dfrac{\cos n\pi}{nT_s^2} = \dfrac{(-1)^n}{nT_s^2}, & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

POR LO TANTO, LA RESPUESTA AL IMPULSO DEL FILTRO DERIVADOR DIGITAL ES

$$h_d[n] = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{nT_s}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

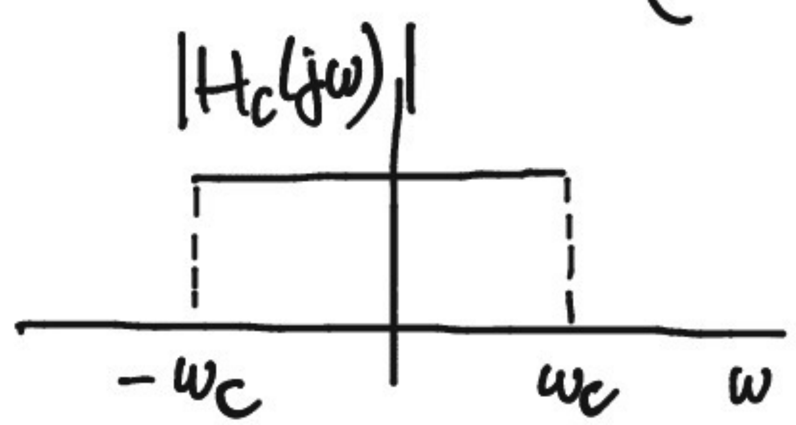
RETARDO DE UNA SEÑAL

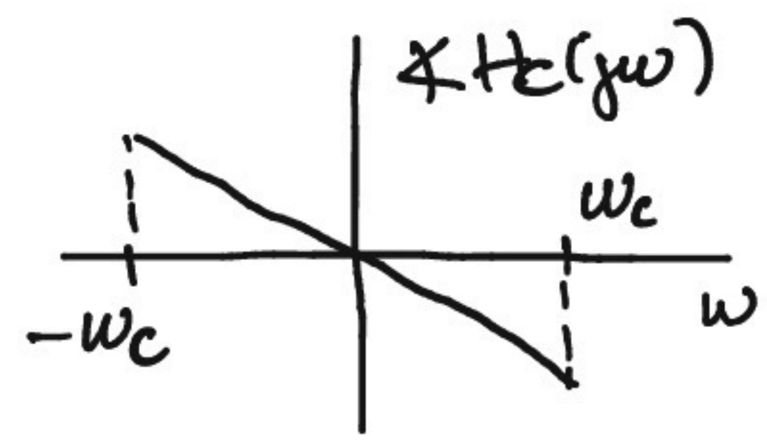
CONSIDEREMOS $y_c(t) = x_c(t-\tau)$ CON $x_c(t)$ DE BANDA LIMITADA Y τ ES UN RETARDO.

$$Y_c(j\omega) = e^{-j\omega\tau} X_c(j\omega)$$

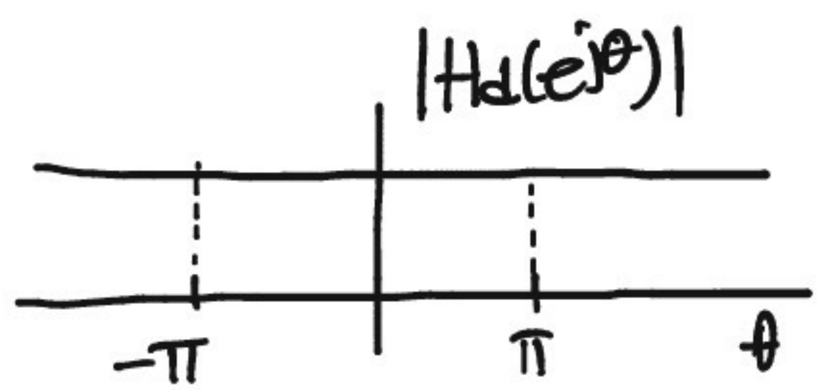
CONSIDEREMOS EL FILTRO DE BANDA LIMITADA ω_c

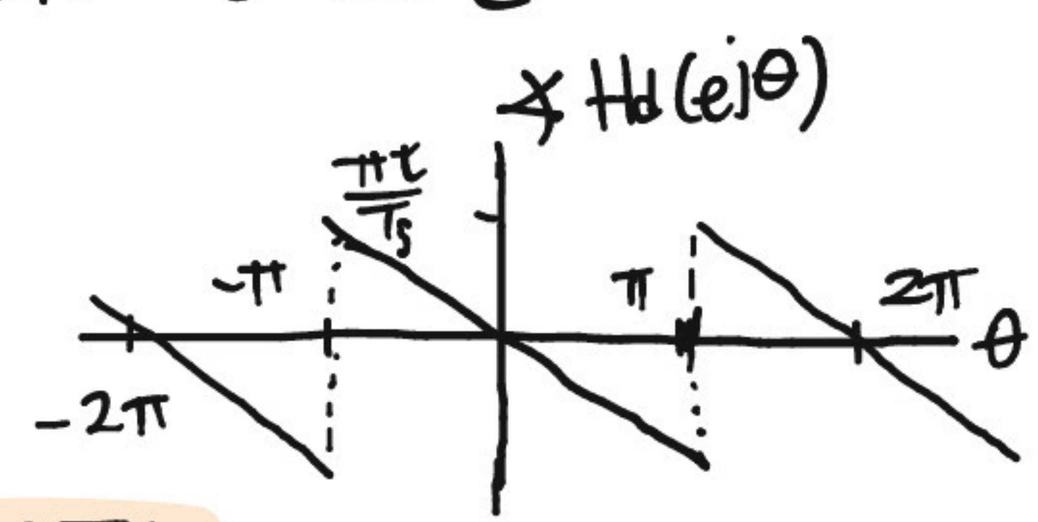
$$H_c(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$





SIGUIENDO EL PROCESO ANTERIOR, TENEMOS UN FILTRO DIGITAL, CON $\omega_s = 2\omega_c$





$$H_d(e^{j\theta}) = e^{-j\theta\tau/T_s} \qquad |\theta| < \pi \qquad (7.35)$$

$$y_d = x_d\left[n - \tau/T_s\right]$$

LA EXPRESIÓN τ/T_s NO TIENE INCONVENIENTE A MENOS QUE τ NO SE MÚLTIPLO DE T_s, NO PODEMOS RETARDAR UNA SECUENCIA UN NÚMERO NO ENTERO SIN PROCESAMIENTO EXTRA.

¿QUÉ SUCEDE CUANDO τ/T_s NO ES ENTERO?

- $x_c(t)$ Y $x_d[n]$ ESTÁN RELACIONADAS MEDIANTE MUESTREO E INTERPOLACIÓN DE BANDA LIMITADA.
- LO MISMO SUCEDE ENTRE $y_d[n]$ Y $y_c(t)$
- CON $H_d(e^{j\theta})$ DADO EN (7.35) $y_d[n]$ SON MUESTRAS DE UNA VERSIÓN DE $y_c(t)$ DESPLAZADA τ, PERO SIN HACER LA INTERPOLACIÓN PARA HALLAR $y_c(t-\tau)$
- VEAMOS, NUEVAMENTE CON EL EJEMPLO DE

$$x_c(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t} = \frac{1}{T_s}\operatorname{sinc}(t/T_s)$$

PARA HALLAR $h_d[n]$ EN ESTE CASO.

EJEMPLO 7.3 RETARDO DE UNA SEÑAL

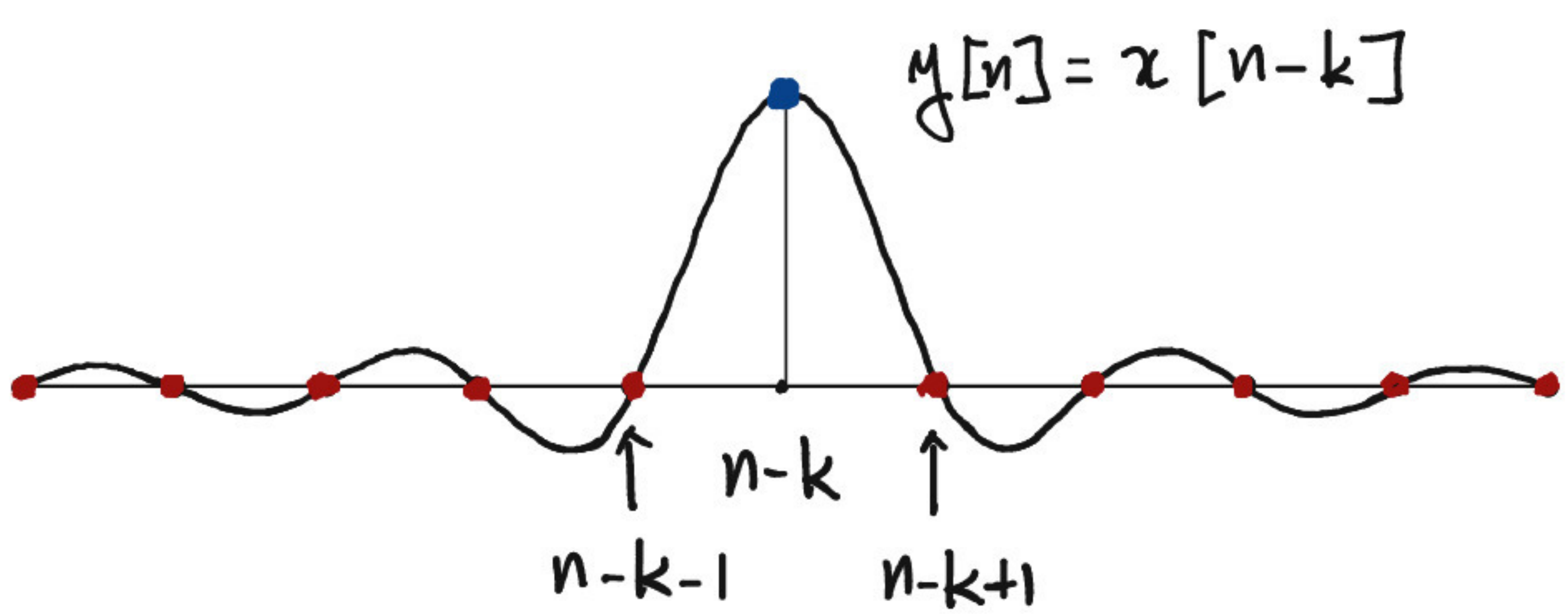
$$x_c(t) = \frac{1}{T_s}\,\mathrm{sinc}\left(t/T_s\right) \rightarrow x_d[n] = \frac{1}{T_s}\,\delta[n] \Rightarrow y_c(t) = x_c(t-\tau) = \frac{1}{T_s}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-\tau}{T_s}\right)$$

$$X_c(jw) = \Pi\left(\frac{wT_s}{2\pi}\right) \quad \text{BANDA LIMITADA}$$

$$y_d[n] = y_c(nT_s) = \frac{1}{T_s}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{nT_s-\tau}{T_s}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{h_d[n] = \mathrm{sinc}\left(\frac{nT_s-\tau}{T_s}\right)}$$

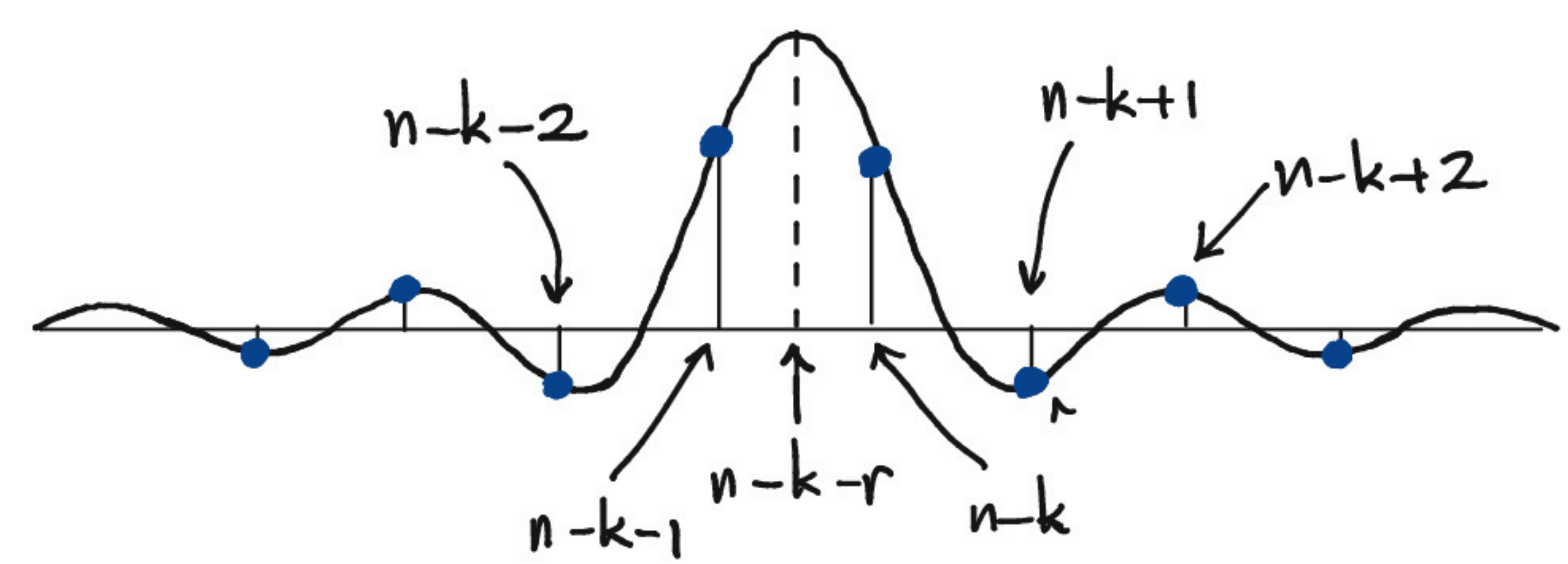
(i) $\tau = kT_s,\ k\in\mathbb{Z} \qquad h_d[n] = \mathrm{sinc}(n-k)$



EN ESTE CASO SOLO SE USA UN PUNTO DE LA INTERPOLACIÓN PUES EL RESTO TIENEN PONDERACIÓN CERO.

(ii) $\tau = (k+r)T_s,\ k\in\mathbb{Z},\ r\in\mathbb{R},\ 0<r<1$

$$h_d[n] = \mathrm{sinc}(n-k-r)$$



EN ESTE CASO PARA CALCULAR LA SALIDA SE USAN VALORES EN VARIOS PUNTOS PONDERADOS POR LA FUNCIÓN DE INTERPOLACIÓN (sinc)

7.4.2. Retardo de media muestra

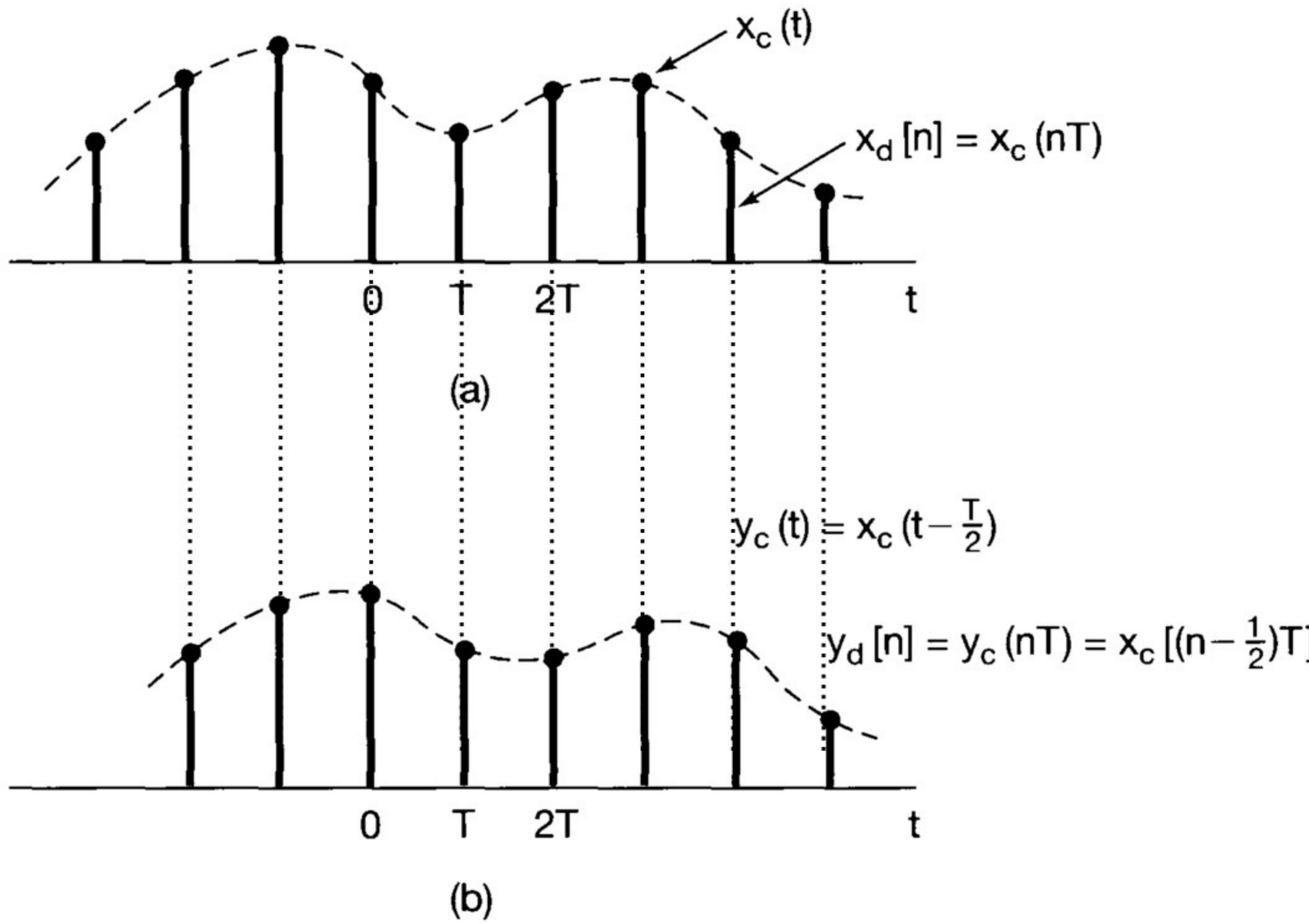
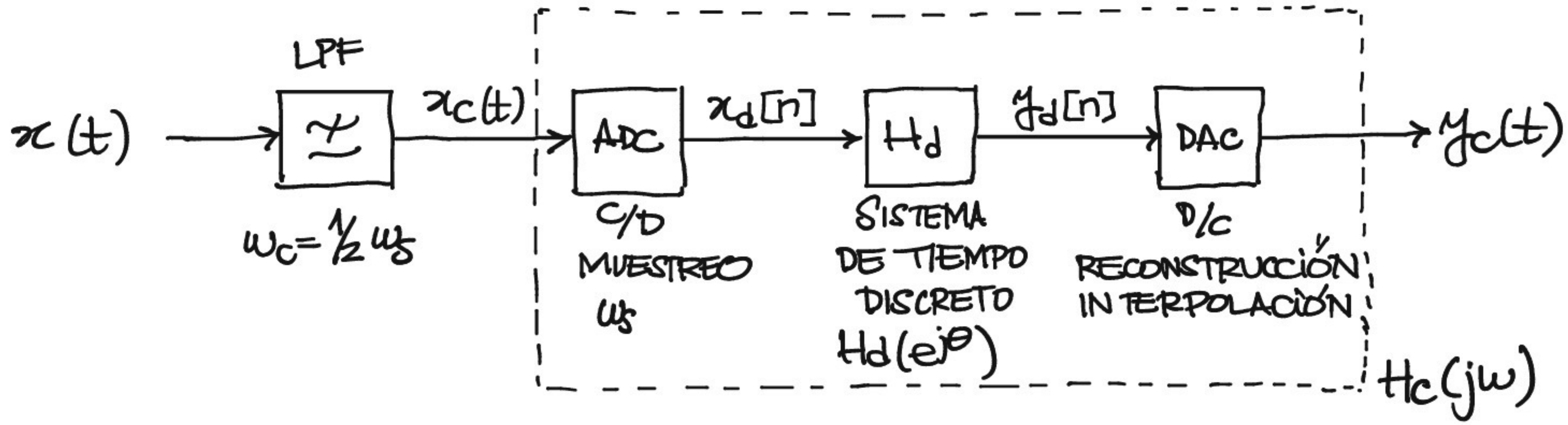


Figure 7.30 (a) Sequence of samples of a continuous-time signal $x_c(t)$; (b) sequence in (a) with a half-sample delay.

RESUMEN



T_s: PERÍODO DE MUESTREO

$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$: FRECUENCIA (ANGULAR) DE MUESTREO

$\omega_s = 2\pi f_s$

f_s: FRECUENCIA DE MUESTREO (Hz)

$$x_d[n] = x_c(nT_s)$$
$$y_d[n] = y_c(nT_s)$$

$$Y_d(e^{j\theta}) = H_d(e^{j\theta})\, X_d(e^{j\theta}) \quad , \quad Y_c(j\omega) = H_c(j\omega)\, X_c(j\omega)$$

$$H_D(e^{j\theta})\Big|_{\theta=\omega T_s} = H_c(j\omega) \quad \forall |\omega| < \tfrac{1}{2}\omega_s$$

O DE OTRA FORMA

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_D(e^{j\omega T_s}), & |\omega| < \frac{1}{2}\omega_s \\ 0, & |\omega| > \frac{1}{2}\omega_s \end{cases}$$

① ~~ENVENTAR~~ FILTRAR (ANTIALIASING) $H_c(j\omega) \longrightarrow \tilde{H}_c(j\omega), \tilde{h}_c(t)$

② MUESTREAR $\tilde{h}(t) \longrightarrow h_D[n] = T_s\, \tilde{h}(nT_s)$

(a) DEBE TENER FINITOS COEFICIENTES

ENVENTANAR LA $h_D[n] \longrightarrow \tilde{h}_D[n]$

(b) DEBE SER CAUSAL $\longrightarrow$ RETARDAR $\tilde{h}_D[n]$