Clase del 15/05/2023 ①

Recordemos algunos de los conceptos que introdujimos en la clase pasada.

(i) Momento de orden r

$$m_r = E(X^r) \quad \text{para } X: \Omega \to R_X.$$

(ii) De esos momentos para nosotros será relevante el segundo momento

$$m_2 = E(X^2)$$

(iii) Si $m_2 < +\infty$ definimos la varianza de X como el número

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X - E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Una propiedad importante de la varianza es su comportamiento para sumas de v.a. independientes. Demostramos en la clase pasada que si $\{X_j\}_{j=1}^n$ son v.a independientes cada una con segundo momento finito esto es ~~$E(X_j^2$~~ $E(X_j^2) < +\infty$, entonces si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Se tiene que

$$\boxed{\mathrm{var}(S_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}(X_j)}$$

Si además las X_j tienen la misma distribución y por consiguiente $\mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2$ entonces $\mathrm{var}(S_n) = n\sigma^2$.

(iv) Otro concepto que introdujimos la clase pasada fue el de covarianza entre dos v.a. Sean (X, Y) un par de v.a. que poseen

(a) función de probabilidad conjunta

$$p_{X,Y}(x_k, y_j) = P(X = x_k, Y = y_j)$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{x_k \in R_X} \sum_{y_j \in R_Y} (x_k - E(X))(y_j - E(Y)) \, p_{X,Y}(x_k, y_j)$$

esto en el caso discreto.

(b) en el caso continuo

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))(y - E(Y)) \, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

cuando $f_{XY}(x,y)$ es la densidad conjunta.

También podemos definir la noción usando las propiedades de la esperanza. Entonces

$$Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

lo que nos queda al desarrollar el producto

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Ahora podemos demostrar la desigualdad de Schwarz para v.a.

Proposición:

$$\boxed{|E(XY)| \leq (E(X^2))^{1/2}(E(Y^2))^{1/2}}$$

Demostración:

Definamos la función cuadrática

$$G(\alpha) = E(\alpha X + Y)^2$$

En primer lugar notemos que $G(\alpha) \geq 0$.

Además al desarrollar se obtiene

$$G(\alpha) = \alpha^2 E(X^2) + 2\alpha E(XY) + E(Y^2)$$

Este polinomio cuadrático es siempre positivo luego no ~~s~~ posee raíces reales.

Por tanto el discriminante es negativo

$$\Delta = \left[2\,E(XY)\right]^2 - 4\,E(X^2)\,E(Y^2) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(E(XY)\right)^2 \leq E(X^2)\,E(Y^2)$$

Luego extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros obtenemos

$$\boxed{\left|E(XY)\right| \leq \left(E(X^2)\right)^{1/2}\left(E(Y^2)\right)^{1/2}}$$

Luego de esta demostración podemos introducir el coeficiente de correlación de Pearson

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}$$

Donde $\sigma_X^2 = E\left[(X - E(X))^2\right]$

y $\sigma_Y^2 = E\left[(Y - E(Y))^2\right]$

Entonces $$\rho(X,Y) = \frac{E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right]}{\sigma_X\,\sigma_Y}$$

$$|\rho(X,Y)| \leq \frac{\left(E\,(X - E(X))^2\right)^{1/2}}{\sigma_X}\,\frac{\left(E\,(Y - E(Y))^2\right)^{1/2}}{\sigma_Y}$$

$= 1$

Obtenemos así que

$$\boxed{-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1}$$

Distribución de una suma de v.a independientes.

Recordemos que si X e Y son v.a. independientes su función de probabilidad conjunta es la función bivariada

$$p_{X,Y}(x_k, y_j) = P(X = x_k \text{ e } Y = y_j)$$

$$= P(X = x_k)\, P(Y = y_j)$$

Estamos interesados en la variable aleatoria

$$Z = X + Y$$

Entonces

$$\{Z = z\} = \sum_{x_k} \sum_{\substack{y_j \\ x_k + y_j = z}} P(X = x_k)\, P(Y = y_j)$$

pero si $x_k + y_j = z \Rightarrow y_j = z - x_k$)

$$= \sum_{x_k} P(X = x_k)\, P(Y = z - x_k)$$

$$= \sum_{x_k \in R_X} P_X(x_k)\, P_Y(z - x_k)$$

A la función

$$z \to \sum_{x_k \in R_X} \mathbb{P}(X = x_k)\, \mathbb{P}(Y = z - x_k)$$

$$= \sum_{k \in R_X} P_X(x_k)\, P_Y(z - x_k)$$

se le llama convolución de las funciones de probabilidad P_X y P_Y.

Ejemplo: Sea $X : \Omega \to \{1, 2, \ldots, 6\}$

$P_X(j) = \frac{1}{6}$. $Y : \Omega \to \{1, 2, \ldots, 6\}$

$P_Y(j) = \frac{1}{6}$

Ahora X e Y son independientes

$Z = X + Y$

Entonces $R_Z = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$$P_Z(2) = \mathbb{P}_X(1)\ \mathbb{P}_Y(1) = \frac{1}{36}$$

$$P_Z(3) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$$

$$P_Z(4) = \mathbb{P}(X = 1\ Y = 3) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 2)$$

$$+ \mathbb{P}(X = 3\ Y = 1)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$ y así se continúa.

También podemos considerar el caso en que las v.a. son absolutamente continuas e independientes

Esto es $X \longrightarrow f_X(x)$

$Y \longrightarrow f_Y(y)$

tenemos $Z = X+Y$. y se verifica al igual que antes

$Z = z$ si $X = x$ en $Y = z - x$.

$x \in R_X$ luego.

$$P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z)$$

$$= P(Y \leq z - x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x)\, f_X(x)\, dx$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y'(z-x)\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x)\, f_X(x)\, dx$$

También se puede demostrar que $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)\, dy$

1.- Ejemplo

Sean $X \overset{d}{\sim}$ exponencial de parámetro λ_1

e $Y \overset{d}{\sim}$ exponencial de parámetro λ_2

$e_X(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \quad x \geq 0 \qquad Z = X+Y$

$e_Y(y) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \quad y \geq 0.$

$$P(X+Y \leq z) = P(X+Y \leq z)$$

$$= \cancel{P(Z \leq Y \leq}$$

$$= P(Y \leq z - X, X \leq z)$$

$$= \int_0^z \int_0^{z-x} f_Y(y)\,dy\, f_X(x)\,dx$$

$$F_Z(z) = \int_0^z F_Y(z-x) f_X(x)\,dx$$

$$f_Z(z) = \int_0^z f_Y(z-x) f_X(x)\,dx$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^z e^{-\lambda_2(z-x)} e^{-\lambda_2(x)}\,dx$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \int_0^z e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x}\,dx$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x}\Big|_0^z$$

$$= \cancel{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}} \, e^{-\lambda_2 z}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 z} \left[e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) z} - 1 \right]$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z} \right]$$

si $\lambda_1 = \lambda_2$ haciendo de nuevo el cálculo.

$$\boxed{f_Z(z) = \cancel{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}} \lambda_1^2 \, e^{-\lambda_1 z} z .}$$

2.– Ejemplo.

Sea $X \overset{d}{\sim} N(0,1)$ e $Y \overset{d}{\sim} N(0,1)$

¿Cuál será la distribución de $Z = X + Y$

Sabiendo que X e Y son independientes?

$$\varphi_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-y)^2}{2}} e^{-y^2/2} \, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2zy + y^2)} e^{-y^2/2} \, dy$$

$$= \frac{e^{-z^2/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(2y^2-2yz)} \, dy$$

$$= \frac{e^{-z^2/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y^2-yz+\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{4}z^2\right)} \, dy$$

$$= \frac{e^{-z^2/2}}{2\pi} \, e^{\frac{1}{4}z^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y-\frac{1}{2}z\right)^2} \, dy$$

$$y - \tfrac{1}{2}z = \frac{u}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{e^{-z^2/4}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} \, du \; \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi_Z(z) = \frac{e^{-z^2/4}}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2/2}}{\sqrt{2\pi}\;\sqrt{2}} \qquad \sigma^2 = 2 \implies$$

$$\boxed{N(0,2)}$$