Clase 10/05/2023

Hoy veremos la varianza y covarianza de variables aleatorias.

Antes damos un repaso de la esperanza.

Sea $X : \Omega \to R_X \subseteq \mathbb{R}$ una v.a.

definimos la esperanza de X denotada por $E(X)$

a) $E(X) = \sum_{x_k \in R_X} x_k \, P_X(x_k)$ caso discreto.

b) $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, f_X(x) \, dx$ caso continuo.

Propiedades:

Si α y β son reales

(i) $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$

(ii) Si X es una v.a. constante

$P(X = a) = 1$.

$E(X) = a$.

(iii) Si X es una v.a. positiva

$$E(X) = \int_0^\infty P(X > x) \, dx.$$

(iv) Si X e Y son independientes

$E(XY) = E(X) \, E(Y)$.

(2)

Otra propiedad importante es la siguiente: Sea $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y X una v.a. La función f nos permite introducir la v.a. $f \circ X = f(X)$

$$\Omega \xrightarrow{X} R_X \subseteq D_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$f(X).$$

Nos preguntamos entonces ¿cómo calcular $Ef(X)$? para resolverlo consideremos $X: \Omega \to \mathbb{R}_X$ una variable aleatoria discreta con valores $\{x_1, x_2, \dots, x_n \dots\}$ y $p_X(x_k)$ la probabilidad de que $X = x_k$.

$f(X)$ toma el valor $f(x_k)$ cuando $\{X = x_k\}$ entonces por definición

$$E[f(X)] = \sum_{x_k \in \mathbb{R}_X} f(x_k)\, P(X = x_k)$$

$$= \sum_{x_k \in R_X} f(x_k)\, p_X(x_k)$$

También podemos considerar el caso de una va absolutamente continua con densidad g_X entonces $E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g_X(x)\, dx$.

Momento de una variable aleatoria.

Consideremos la función $f_r(x) = x^2$

el momento de orden r de una variable aleatoria se define por

$$m_r = E(f_r(X)) = E(X^r)$$

Nosotros usaremos fundamentalmente $r=2$ es decir el segundo momento.

$$m_2 = E(f_2(X)) = E(X^2)$$

Calculemos este momento en algunos casos importantes

Sea B una v.a. Bernoulli de parámetro p

$$E(B^2) = 1^2 P(B=1) + 0^2 P(B=0)$$

$$E(B^2) = p$$

Recordemos que $E(B) = p$ también.

Variable ~~u~~ uniforme en $[a,b]$; sabemos que la densidad es $v_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$

$$E[V_{[a,b]}^2] = \int_a^b \frac{1}{b-a} x^2 \, dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} (b^3 - a^3) = \frac{1}{(b-a)} (b-a)(a^2+ab+b^2)$$

$$= a^2 + ab + b^2$$

Veamos el caso de una exponencial de parámetro λ

$$E[e^2(\lambda)] = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty x \left(x e^{-\lambda x}\right) dx$$

$$= -\lambda \int_0^\infty x \frac{d}{d\lambda}\left[e^{-\lambda x}\right] dx$$

$$= -\lambda \frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\lambda \frac{d}{d\lambda}\left[-\frac{x e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx \right]$$

$$= -\lambda \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right].$$

$$= -\lambda \frac{d}{d\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty \right.$$

$$= -\lambda \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\lambda^2} = -\lambda \cancel{\frac{1}{\lambda}} (-2 \lambda^{-3})$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}$$

Veamos el caso de una variable aleatoria con densidad $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Si $Z \overset{d}{=} N(0,1)$

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(x e^{-x^2/2} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[x e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1 .$$

Ahora podemos introducir la varianza de una v.a. es el siguiente número:

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2 \right]$$

Usando las propiedades de la esperanza y desarrollando el cuadrado dentro de ella, nos queda

$$Var(X) = E\left[X^2 - 2X E(X) + (E(X))^2 \right]$$

$$= E(X^2) - 2E(X)\, E(X) + (E(X))^2$$

$$= E(X^2) - 2 (E(X))^2 + (E(X))^2$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2 .$$

~~Calculemos la~~

Ejemplos: 1) calculemos la varianza de una Bernoulli de parámetro p, B.

$$\mathrm{Var}(B) = E(B^2) - (E(B))^2$$
$$= p - p^2 = p(1-p).$$

2) La de una exponencial de parámetro λ, $e(\lambda)$

$$\boxed{\mathrm{Var}(e(\lambda)) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}}$$

3) La varianza de $Z \overset{d}{=} N(0,1)$

$$\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 1 - 0 = 1$$

4) Ejemplo ahora sea la v.a.

$$\boxed{X = \sigma Z + \mu.} \qquad Z \overset{d}{=} N(0,1)$$

Ya hemos visto que la densidad de tal v.a es

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}. \qquad x \in \mathbb{R},$$

pero para calcular la esperanza y varianza resulta mejor usar las propiedades

En primer lugar calculemos la esperanza

$$E(X) = E(\sigma Z + \mu) = \sigma E(Z) + E(\mu)$$
$$= \sigma \cdot (0) + \mu = \mu.$$

Luego $E(X) = \mu$. Por otra parte

$$E(X^2) = E\left[(\sigma Z + \mu)^2\right] = E(\sigma^2 Z^2 + 2\sigma Z \mu + \mu^2)$$
$$= \sigma^2 E(Z^2) + 2\sigma\mu\, E(Z) + \mu^2$$
$$= \sigma^2 + 0 + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Luego $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 + \mu^2 - (\mu)^2 = \sigma^2$.

Es por esto que se denota $X \overset{d}{=} N(\mu, \sigma^2)$

varianza.

Esperanza

Ahora queremos considerar estas dos cantidades: esperanza y varianza para una v.a. binomial S_n de parámetros (n, p). Ya vimos de

$\{S_n = k\}$ si en n-tiradas hay k unos.

lo cual permite escribir

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

con cada ξ_j Bernoulli de parámetro p y además las ξ_j son independientes entre si

De esta forma como ya hemos demostrado

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n = E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$$

luego

$$ES_n = E(\xi_1)+E(\xi_2)+\cdots+E(\xi_n)$$
$$= np.$$

y este número lo habíamos hallado en la clase pasada por un método directo y algo más calculatorio.

Antes de calcular la varianza veamos una propiedad general de esta cantidad.

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a tal les que $E(X_j)^2 < +\infty$

Entonces se tiene si definimos $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\boxed{Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i)}$$

demostración:

Tenemos en primer lugar

$$E(S_n) = E(X_1)+\cdots+E(X_n)$$

Luego $Var(S_n) = E\left(\left(S_n - E(S_n)\right)^2\right)$

$$= E\left[\left(\left(X_1+\cdots+X_n\right)-\left(E(X_1)+\cdots+E(X_n)\right)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left((X_1-E(X_1))+(X_2-E(X_2))+\cdots+(X_n-E(X_n))\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\left[(X_i-E(X_i))\,(X_j-E(X_j))\right]$$

Ahora bien tenemos

$$= \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - E(X_i)]^2 + \sum\sum_{i\neq j} E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$

$$\overset{\text{indep.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \text{var}(X_i) + \sum\sum_{i\neq j} E(X_i - E(X_i))\, E(X_j - E(X_j))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \text{var}(X_i) + 0.$$

Como queríamos demostrar.

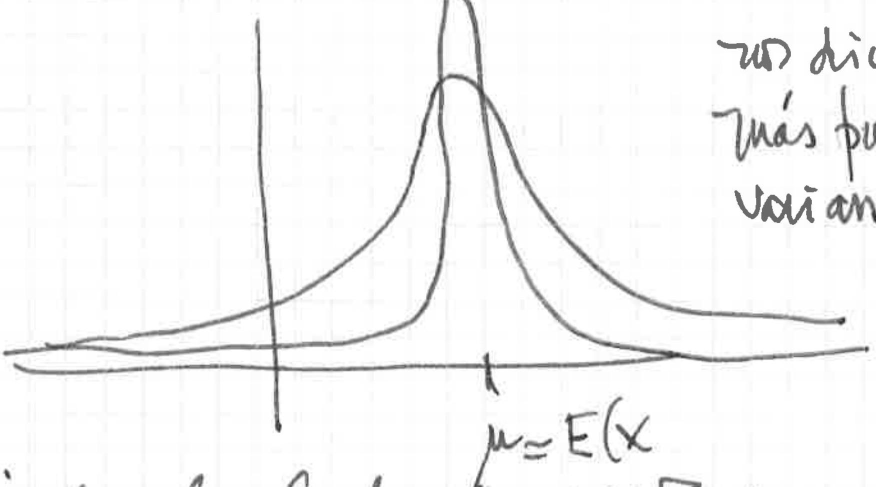
Apliquemos esto a la variable Binomial de parámetro (n, p)

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

$$\text{var}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \text{var}(\xi_i) = \underline{\underline{n\, p(1-p)}}$$

A modo de justificación la varianza de una variable aleatoria mide cuanto se dispersa la variable en torno a su media.

Esquemáticamente



Estas dos gráficas nos dicen que la densidad más puntiaguda tiene varianza más pequeña.

La raíz cuadrada de la varianza se denomina desvío estándar. $\sigma_X = [\text{var}(X)]^{1/2}$

Ahora introduciremos un nuevo concepto que establece la dependencia entre dos v.a.

Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta $f_{(X,Y)}(x,y)$

probabilidad conjunta $P_{X,Y}(x_k, y_j)$

Definimos la covarianza entre X e Y como la cantidad

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]$$

$$= \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} (x-E(x))(y-E(y))\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\sum_{x_k\in R_X}\ \sum_{y_j\in R_Y} (x_k-E(X))(y_j-E(Y))\, P_{X,Y}(x_k,y_j)$$

Podemos usar las propiedades de la esperanza para obtener otra expresión para la covarianza

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\left[\, XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)\right]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - \cancel{E(X)E(Y)} + \cancel{E(X)E(Y)}$$

$$= \underline{E(XY) - E(X)E(Y)}$$

Una primera e importante propiedad es la siguiente si X e Y son v.a independientes entonces

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$= \underbrace{E(X)E(Y)}_{\text{por ind}} - E(X)E(Y) = 0.$$

El recíproco no siempre es cierto.

Un elemento importante que se deriva de la covarianza es el coeficiente de correlación de Pearson ρ_{XY}

$$\boxed{\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.}$$

Se puede demostrar que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]$$
$$\leq \left(E(X-E(X))^2\right)^{1/2}\left(E(Y-E(Y))^2\right)^{1/2}$$
$$= \sigma_X \sigma_Y$$

luego

$$\boxed{|\rho_{XY}| \leq 1} \qquad \boxed{-1 \leq \rho_{XY} \leq 1}.$$