Primer Parcial – Matemática Discreta I

Sábado 29 de abril de 2023.

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	Des. 1	Puntaje Total

Sugerencia: pasar las respuestas de los ejercicios de múltiple opción cuidadosamente.
Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.
Cada respuesta correcta de múltiple opción vale 6 puntos.
Respuestas incorrectas restan 1 punto.
El ejercicio de desarrollo correcto y completo vale 10 puntos.
La duración del parcial es de tres horas.

Múltiple Opción 1

Determinar el coeficiente en xy^3 de la expresión $(x - y + y^3 + 2)^5$.
(A) 20;
(B) 40;
(C) 80;
(D) 120;
(E) 200.

Múltiple Opción 2

Sea a_n la cantidad de maneras de reunir n pesos uruguayos con monedas de 1 peso y de 5 pesos. Entonces, la función generatriz de la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ es:
(A) $a(x) = \frac{1}{1+x}\frac{1}{1+x^5}$;
(B) $a(x) = \frac{1}{1+x}\frac{1}{1-x^5}$;
(C) $a(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^5}$;
(D) $a(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1+x^5}$;
(E) $a(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1+5x}$.

Múltiple Opción 3

Encontrar el menor entero positivo n que permita asegurar que, de cualquier forma que se elijan n enteros distintos entre 1 y 100 inclusive, habrá dos de ellos cuya suma sea igual a 50. Opciones:
(A) 26;
(B) 51;
(C) 53;
(D) 77;
(E) 83.

Múltiple Opción 4

Sea $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales tal que $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1$ para cada natural n tal que $n \geq 1$, y que cumple con las condiciones $d_0 = 0$ y $d_{100} = 0$. Hallar d_{50}.
(A) 50^2;
(B) 60^2;
(C) 70^2;
(D) 80^2;
(E) 90^2.

Múltiple Opción 5

Determinar la cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1+x_2+x_3 = 17$ que cumplen las siguientes restricciones $-2 \leq x_1 \leq 6$, $-2 \leq x_2 \leq 6$, $x_3 \geq 5$.

Sugerencia: aplicar cambios de variables adecuados para que todas las variables sean enteras y no negativas.
(A) 41;
(B) 51;
(C) 61;
(D) 71;
(E) 81.

Ejercicio de Desarrollo

Probar que si $a_1 = 3$, $a_2 = 10$, $a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n$ para todo $n \geq 1$, entonces $a_n \geq 3^n$ para todo $n \geq 1$.

Importante: indicar claramente el método de demostración empleado y justificar detalladamente cada paso de la demostración.