CLASE 6: FUERZAS CENTRALES

OBJETIVOS:

→ Comprender los conceptos de fuerza central y fuerza central isotrópica

→ Repasar el concepto de momento angular y su conservación. Utilizar la conservación de $\vec{L}$ reducir el número de variables del problema

→ Aprender técnicas para "resolver" la ecuación radial de un movimiento central

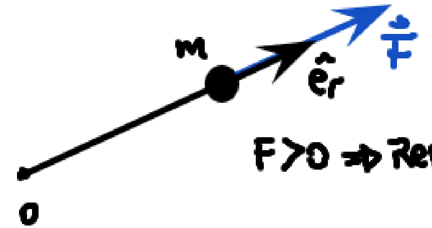
→ Comprender el concepto de Potencial efectivo y su utilidad para discutir la naturaleza de las órbitas mediante argumentos energéticos

FUERZA CENTRAL

→ Def: Dado un punto O fijo (centro de fuerza)

$\Rightarrow$ $\vec{F}$ ES CENTRAL RESPECTO A O $\Leftrightarrow$ $\vec{F} = F\,\hat{e}_r$ $\quad$ $\hat{e}_r$ = versor radial en esféricas

→ F es un número real
- $\oplus$: partícula es REPELIDA por O
- $\ominus$: " " ATRAÍDA por O



F>0 ⇒ Repulsiva

→ En general: $F = F(r, \theta, \varphi)$

Sin embargo, en muchos casos de interés $F = F(r)$ $\Rightarrow$ isotrópica (depende solo de la distancia al centro de fuerza)

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

→ Momento angular respecto a O: $\boxed{\vec{L}_O \overset{def}{=} (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{p}}$

→ Elegiremos siempre el origen en el centro de fuerzas $\Rightarrow \vec{r}_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}}$

Por comodidad no escribiremos más el punto O, pero no hay que perder de vista que $\vec{L}$ se calcula SIEMPRE EN RELACIÓN A UN PUNTO

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}}\times\vec{p} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}}$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{NETA}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \cancel{\vec{v}\times m\vec{v}} + \vec{r}\times\vec{F}_{NETA}$$

$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$

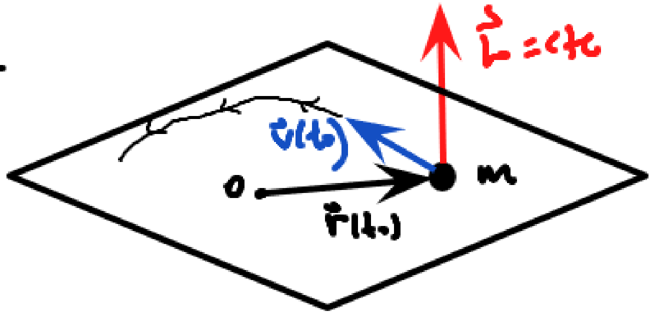
$$\vec{F}_{NETA} = F\hat{e}_r$$

(asumimos que sólo actúa la fuerza central)

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \cancel{r\hat{e}_r\times F\hat{e}_r} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = cte}$$

→ CONSECUENCIA: EL MOVIMIENTO ESTÁ CONFINADO AL PLANO $\Pi \perp \vec{L}$ DEFINIDO POR $\vec{r}(t_0)$ Y $\vec{v}(t_0)$

(si escapara de dicho plano, debería "torcerse" el momento angular)

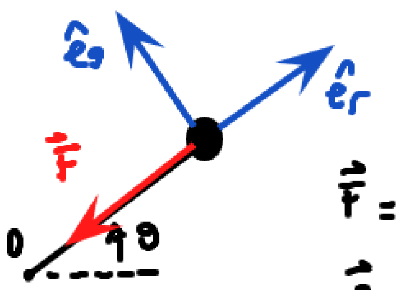


ECUACIONES DE MOVIMIENTO

→ Como el movimiento es plano ⇒ 2 grados de libertad ⇒ ALCANZA CON UTILIZAR COORDENADAS POLARES → $\underbrace{\rho, \varphi}$
(HABRÁ 2 EC. DE MOVIMIENTO)

Suelen denominarse r, θ, ojo...

→ Newton: $\vec F_{NETA} = m\vec a \Rightarrow \begin{cases} \vec F_N \cdot \hat e_r = m\vec a \cdot \hat e_r \\ \vec F_N \cdot \hat e_\theta = m\vec a \cdot \hat e_\theta \end{cases}$



$\vec F = F\hat e_r$ conocida

$\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2)\hat e_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\hat e_\theta$

$\hat e_r \to \boxed{F = m(\ddot r - r\dot\theta^2)}$

$\hat e_\theta \to \boxed{0 = m(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)}$

sistema de 2 ecs. diferenciales acopladas

OBS 1: La ecuación obtenida proyectando según $\hat e_\theta$ ES INTEGRABLE (es una ecuación de variables separables)

$$2\dot r\dot\theta = -r\ddot\theta \to \frac{2\dot r}{r} = -\frac{\ddot\theta}{\dot\theta} \to 2\int_{t_0}^{t}\frac{2\dot r}{r}dt = -\int_{t_0}^{t}\frac{\ddot\theta}{\dot\theta}dt \xrightarrow[\ddot\theta dt = d\dot\theta]{\dot r dt = dr} 2\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r} = -\int_{\dot\theta_0}^{\dot\theta}\frac{d\dot\theta}{\dot\theta} \to 2\log\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\log\left(\frac{\dot\theta}{\dot\theta_0}\right)$$

$$\to \log\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right) = \log\left(\frac{\dot\theta_0}{\dot\theta}\right) \to \frac{r^2}{r_0^2} = \frac{\dot\theta_0}{\dot\theta} \to r^2\dot\theta = r_0^2\dot\theta_0 \xrightarrow[\times m]{} \boxed{mr^2\dot\theta = mr_0^2\dot\theta_0}$$

LEY DE CONSERVACIÓN

→ A partir de $\vec{F}_N \cdot \hat{e}_\theta = m\vec{a} \cdot \hat{e}_\theta \Rightarrow 0 = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \Rightarrow \underbrace{mr^2\dot{\theta} = mr_0^2\dot{\theta}_0}$,

LA CANTIDAD $mr^2\dot{\theta}$ ES CONSTANTE. ¿QUÉ REPRESENTA?

Tenemos que $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = cte$

En polares: $\vec{r} = r\hat{e}_r$

$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$\vec{p} = m\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{L} = r\hat{e}_r \times m(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = \underbrace{mr^2\dot{\theta}\hat{k}}$!

LA CANTIDAD CONSERVADA ES EL MÓDULO DEL MOMENTO ANGULAR:

$$\boxed{|\vec{L}| = mr^2\dot{\theta} = \ell = cte}$$

ℓ → NOTACIÓN USUAL

<u>OBS</u>: El valor numérico de ℓ QUEDA DEFINIDO A TRAVÉS DE LOS DATOS INICIALES DEL PROBLEMA: $\left.\begin{matrix} \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ell = \ell_0 = |\vec{r}_0 \times m\vec{v}_0|$

<u>OBS 2</u>: La constancia de ℓ PERMITIRÁ EXPRESAR $\dot{\theta}$ COMO FUNCIÓN DE r EN DONDE HAGA FALTA

$$\ell = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}}$$

(El valor de ℓ se obtiene de los datos iniciales)

Teníamos: $\begin{cases} F = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \longrightarrow mr^2\dot{\theta} = l = cte \longrightarrow \dot{\theta} = \dfrac{l}{mr^2} \end{cases} \Rightarrow F = m\left(\ddot{r} - r\left(\dfrac{l}{mr^2}\right)^2\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow F = m\ddot{r} - \dfrac{l^2}{mr^3} \\ \text{Si } F \text{ es isotrópica: } F(r,\theta) = F(r) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\ddot{r} - \dfrac{l^2}{m^2 r^3} = \dfrac{F(r)}{m}}$$

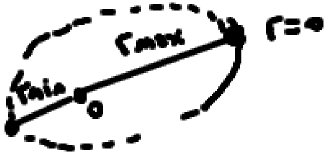
ECUACIÓN RADIAL

Si F es isotrópica, usando la conservación de $\vec{L}$ se puede DESACOPLAR las ecs. de mov. y obtener una única ecuación en la variable radial

¿Qué puedo hacer con la ec. radial?

1) Como es de la forma $\ddot{r} = f(r) \Rightarrow$ SIEMPRE PUEDO PREINTEGRARLA PARA OBTENER $\dot{r}(r)$

Esto es muy útil porque PERMITE HALLAR LOS EXTREMOS DEL MOVIMIENTO (PUNTOS DE RETROCESO), QUE OCURREN EN LOS r / $\dot{r} = 0$



2) En algunos casos excepcionales se puede convertir en una ecuación resoluble mediante el

CAMBIO DE VARIABLE DE BINET : $u(\theta) = \frac{1}{r(t)} \Rightarrow$ Su solución no será la ley horaria sino la TRAYECTORIA $r(\theta)$

$$u(\theta) = \frac{1}{r} \Rightarrow u'(\theta) = \frac{du}{d\theta} = \frac{d(1/r)}{dr}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} \Rightarrow u' = -\frac{1}{r^2}\dot{r}\cdot\frac{1}{\dot{\theta}} = \frac{-\dot{r}}{r^2\dot{\theta}}$$

$$\text{Pero } mr^2\dot{\theta} = l \quad \Rightarrow u' = -\frac{\dot{r}m}{l} \Rightarrow \boxed{\dot{r} = -\frac{lu'}{m}}$$

$$\dot{r} = -\frac{lu'}{m} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{l}{m}\frac{du'}{dt} = -\frac{l}{m}\frac{du'}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{lu''\dot{\theta}}{m}$$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} = \frac{lu^2}{m}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = -\frac{lu''lu^2}{m^2} \Rightarrow \boxed{\ddot{r} = -\frac{l^2u^2u''}{m^2}}$$

Tenemos : $\ddot{r} - \frac{l^2}{m^2r^3} = \frac{F(r)}{m} \xrightarrow[\ddot{r} = -\frac{l^2u^2u''}{m^2}]{\frac{1}{r^3} = u^3} -\frac{l^2u^2u''}{m^2} - \frac{l^2u^3}{m^2} = \frac{F(1/u)}{m} \Rightarrow \boxed{u'' + u = -\frac{mF(1/u)}{u^2l^2}}$

Convencerse de que si $F \propto 1/r^2$ o $F \propto 1/r^3 \Rightarrow$ ECUACIÓN LINEAL DE 2º ORDEN CON COEF. CONSTANTES (RESOLUBLE)

ENERGÍA

→ Se puede demostrar (hacerlo) que FUERZAS CENTRALES ISOTRÓPICAS SON CONSERVATIVAS : $\exists\, U(r) \,/\, -\frac{\partial U}{\partial r} = F(r)$

$\Rightarrow$ En este tipo de movimientos SE CONSERVA LA ENERGÍA

$$\left.\begin{aligned} E &= K + U \\ K &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \right)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + U(r) = cte} \quad (1)$$

→ Pero teníamos otra cantidad conservada : $l = m r^2 \dot{\theta} = cte \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{m r^2} \rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{l^2}{m^2 r^4}}$ (2)

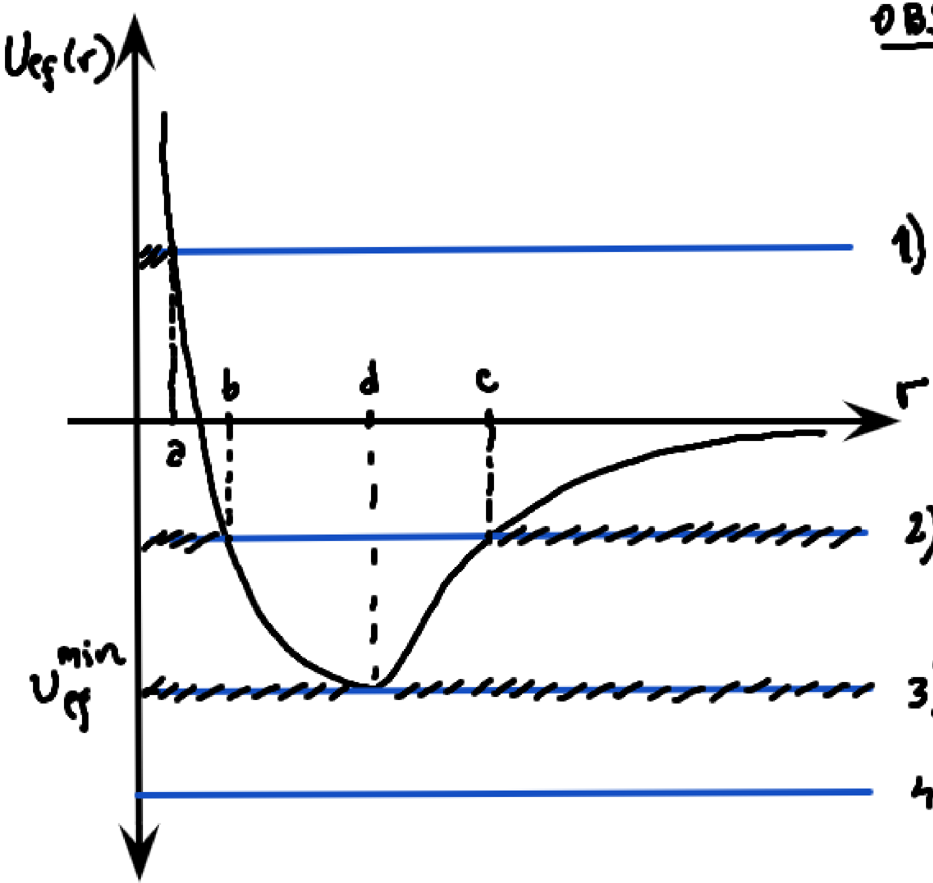
$$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2 m r^2} + U(r) = cte}$$

Notar que el término $\frac{l^2}{2mr^2}$ PROVIENE DE K PERO DEPENDE DE r $\Rightarrow$ EN LA PRÁCTICA SE COMPORTA COMO UNA CONTRIBUCIÓN ADICIONAL DE ENERGÍA POTENCIAL

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{ef}(r) = cte}, \quad \text{con} \quad \boxed{U_{ef}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \Rightarrow \text{POTENCIAL EFECTIVO}}$$

¿Qué información puedo extraer del potencial efectivo?

EJEMPLO (conceptual)



OBS: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{ef}(r) \Rightarrow \overbrace{\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2}^{\geq 0} = E - U_{ef}(r) \geq 0 \Rightarrow \boxed{E \geq U_{ef}(r)}$

LA PARTÍCULA SOLO PUEDE ENCONTRARSE EN REGIONES EN LAS QUE LA ENERGÍA TOTAL ES MAYOR O IGUAL QUE U_{ef}

1) $E \geq 0 \Rightarrow r \geq a$ (órbita abierta)

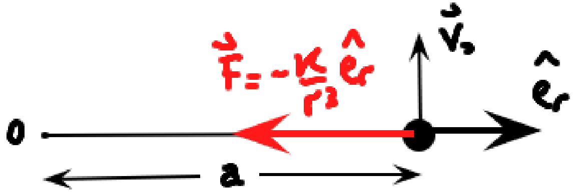
2) $U_{ef}^{min} < E < 0 \Rightarrow b \leq r \leq c$ (órbita acotada)

3) $E = U_{ef}^{min} \Rightarrow r = d$ es el único posible $\Rightarrow$ ÓRBITA CIRCULAR

(mínimos de U_{ef} serán órbitas circulares estables)

4) $E < U_{ef}^{min} \Rightarrow$ Imposible ($\frac{1}{2}m\dot{r}^2 < 0$)

EJEMPLO:



a) Hallar el potencial asociado a $\vec{F}$

b) Obtener y graficar U_{ef}, calcular E y discutir la naturaleza de las órbitas

c) Mostrar que $\exists$ una velocidad inicial v_c / órbita circular

d) Si $v_0 < v_c$, hallar la órbita

e) Mostrar que en dicho caso la partícula colapsa al origen

a) $\vec{F}(r) = -\frac{K}{r^3}\hat{e}_r \Rightarrow F(r) = -\frac{K}{r^3}$

Buscar $U(r)$ / $-\frac{\partial U}{\partial r} = F(r) \Rightarrow U(r) = -\int F(r)\,dr = -\int -\frac{K}{r^3}\,dr$

$$= K\int r^{-3}\,dr = K\frac{r^{-2}}{-2} = -\frac{K}{2r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(r) = \frac{-K}{2r^2}}$$

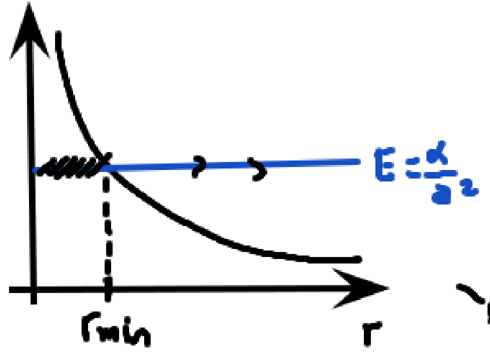
b) $U_{ef}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r)$

Necesito $\ell = |\vec{r} \times \vec{p}| \stackrel{t=0}{=} |a\hat{e}_r \times m v_0 \hat{e}_\theta| = |m a v_0 \hat{k}| = m a v_0$

$$\Rightarrow U_{ef}(r) = \frac{(mav_0)^2}{2mr^2} - \frac{K}{2r^2} = \frac{ma^2v_0^2 - K}{2r^2} \Rightarrow \boxed{U_{ef}(r) = \frac{\alpha}{r^2}}$$

Defino $\alpha = \frac{ma^2v_0^2 - K}{2}$

Caso 1: $\alpha > 0$ $\left(v_0 > \sqrt{\frac{k}{ma^2}} \right) \Rightarrow$

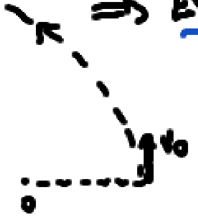


$(\dot r(0) = 0)$

$$E = \frac{1}{2} m \dot r_0^2 + U_{ef}(r=a) = \frac{\alpha}{a^2} > 0$$

Como E debe ser mayor o igual a $U_{ef}(r)$

$\Rightarrow$ **EXISTE UN r mínimo**



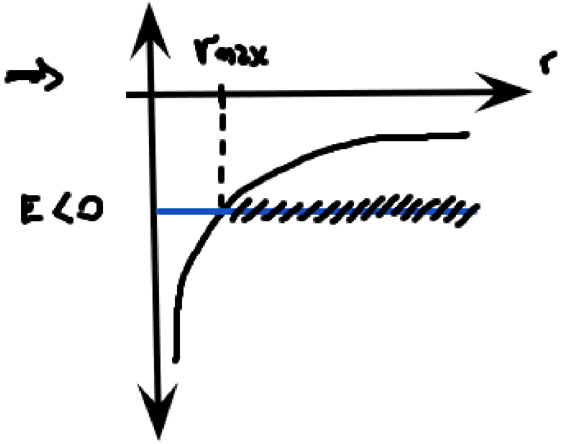
$$\underbrace{E}_{\frac{\alpha}{a^2}} = U_{ef}(r) \qquad \frac{\alpha}{a^2} = \frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow \boxed{r = a = r_{min}}$$

$\Rightarrow$ Como parte de $r = a = r_{min}$ y $\dot r$ nunca vuelve a ser cero, **LA PARTÍCULA SE ALEJARÁ INFINITAMENTE DE O**

$\Rightarrow$ **ÓRBITA ABIERTA**

(Vo muy grande)

Caso 2: $\alpha < 0$ $\left(v_0 < \sqrt{\frac{k}{ma^2}} \right) \Rightarrow$



$$E = \frac{\alpha}{a^2} < 0$$

La condición $E > U_{ef}(r)$ implica la existencia de un r_{max} $(= a)$

$\Rightarrow$ **ÓRBITA ACOTADA**

Caso 3: $\alpha = 0$ $\left(V_0 = \sqrt{\frac{K}{ma^2}} \right) \Rightarrow \begin{matrix} E = 0 \\ U_{ef} = 0 \end{matrix} \Big| \Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E - U_{ef} = 0 \Rightarrow \dot{r} = 0 \ \forall t \Rightarrow \underbrace{r = cte = r(t=0) = a}_{\text{órbita circular}}$

$\Rightarrow$ La órbita circular ocurrirá solo si $V_0 = \sqrt{\frac{K}{ma^2}} = V_c$ (c))

d) Aplicando el C.V. de Binet tenemos que

$$\left. \begin{matrix} u'' + u = -\frac{m F(1/u)}{l^2 u^2} \\ l^2 = (m V_0 a)^2 \\ F(1/u) = -K u^3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow u'' + u = \frac{m K u}{(m V_0 a)^2} = \frac{K u}{m V_0^2 a^2}$$

$$\Rightarrow u'' + \left(1 - \frac{K}{m V_0^2 a^2}\right) u = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u'' + \frac{\alpha}{m V_0^2 a^2} u = 0}$$

Notar que $V_0 < \sqrt{\frac{K}{ma^2}} \Rightarrow \alpha < 0 \Rightarrow$ Defino $-\Omega^2 = \frac{\alpha}{m V_0^2 a^2}$ $\Bigg\} \Rightarrow \boxed{u'' - \Omega^2 u = 0}$

Lineal, 2° orden, coef. cte, además homogénea!

Tenemos: $u'' - \Omega^2 u = 0$

Proponemos $u = e^{\lambda\theta} \Rightarrow u' = \lambda e^{\lambda\theta}$, $u'' = \lambda^2 e^{\lambda\theta}$

$$\left.\begin{array}{l} u'' - \Omega^2 u = 0 \\ u = e^{\lambda\theta},\ u' = \lambda e^{\lambda\theta},\ u'' = \lambda^2 e^{\lambda\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{e^{\lambda\theta}}_{\neq 0}(\lambda^2 - \Omega^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\Omega \rightarrow \boxed{u(\theta) = Ae^{\Omega\theta} + Be^{-\Omega\theta}}$$

Datos iniciales:

$$u(\theta=0) = \frac{1}{r(t=0)} = \frac{1}{a} \Rightarrow A + B = \frac{1}{a}$$

$$u'(\theta=0) = -\frac{m\overbrace{\dot r(t=0)}^{=0}}{\ell} = 0 \Rightarrow \Omega(A-B) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A = B = \frac{1}{2a}}$$

↓ ver c.v. Binet

$$\Rightarrow u(\theta) = \frac{1}{2a}\left(e^{\Omega\theta} + e^{-\Omega\theta}\right) = \frac{\cosh(\Omega\theta)}{a} \Rightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)} = \frac{a}{\cosh(\Omega\theta)} \xrightarrow{\theta\to\infty} 0}$$

(colapsa al origen)